

4. TEMA

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (2)

4.1. Üstel Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri

4.2. Üstel Fonksiyonların Ters Fonksiyonları

4.3. Logaritmik Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri

4.4. Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denlem ve Eşitsizlikler İçeren Problemler

Anahtar Kavramlar

- | | | |
|------------------------------|------------------------|-------------------|
| • artanlık-azalanlık | • fonksiyonun işareti | • örtenlik |
| • bire birlik | • fonksiyonun sıfırı | • teklik-çiftlik |
| • doğal logaritmik fonksiyon | • logaritmik fonksiyon | • üstel fonksiyon |
| • e sayısı | | |

Sembol ve Gösterimler

- | | | |
|------------|--------------|---------|
| • a^x | • $\log_a x$ | • e |
| • $\log x$ | • $\ln x$ | • e^x |

Bu temada sizden

- gerçek sayılarda $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot f(mx \pm r) \pm s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) üstel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- üstel fonksiyonların ters fonksiyonlarını inceleyerek logaritmik fonksiyona dair çıkarım yapabilmeniz,
- $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$) şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot f(mx \pm r) \pm s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) logaritmik fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- gerçek yaşam durumlarında üstel ve logaritmik fonksiyonlarla ifade edilen denklem ve eşitsizlikleri içeren problemleri çözebilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, araştırma ödevi ve performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını cevaplamanız istenmektedir.



4. Tema karekodu



4. Tema Sunusu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Başlarken

Katlanarak çoğalan veya azalan değerlere sahip üstel fonksiyonlar ve bu fonksiyonların terslerinin alınmasıyla elde edilen logaritmik fonksiyonlar mühendislikten biyolojiye, coğrafyadan ekonomiye kadar geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bu fonksiyonlar, doğrusal olmayan büyüme ve değişimlerin temsilinde kritik bir rol oynar. Üstel ve logaritmik fonksiyonlar, mühendislikte sistemlerin zamana bağlı değişimlerinin tanımlanmasında; biyolojide popülasyon değişimlerinde ve enzim reaksiyonlarının hızlarının tahmin edilmesinde; coğrafyada erozyon ve deprem gibi doğal afetlerin etkilerinin modellenmesinde; finansal matematikte ise yatırımların zaman içindeki değer değişimlerinin öngörülmesinde kullanılır.

Ön Değerlendirme

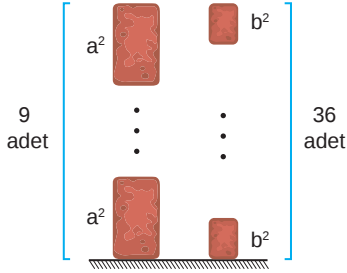
1. Aşağıdaki soruları verilen bilgilere göre cevaplayınız.

Aşağıdaki tabloda ülkemizde bulunan üç gölün 2023 yılındaki yüz ölçümü büyüklükleri ve su hacimleri yaklaşık olarak verilmiştir.

Göller	Yaklaşık Yüz Ölçümü (m^2)	Yaklaşık Su Hacmi (m^3)
Van Gölü	$3,713 \cdot 10^9$	$6,07 \cdot 10^{11}$
Eğirdir Gölü	$4,82 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^9$
Beyşehir Gölü	$6,56 \cdot 10^8$	$5,4 \cdot 10^9$

- Van Gölü'ndeki yaklaşık su hacminin Beyşehir Gölü'ndeki yaklaşık su hacminden kaç m^3 fazla olduğunu bulunuz.
- 2023 yılında yıkanma, yeme, içme, bulaşık yıkama, çamaşır yıkama gibi günlük işlerde kullanılan su miktarı kişi başı 200 litredir. Buna göre Eğirdir Gölü'nden 1000 kişinin yaşadığı bir köye kaç gün yetecek kadar su verilebileceğini bulunuz.
- Göllerin yaklaşık yüz ölçümlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

2.



Yandaki görselde uzunlukları belirtilmiş tuğla parçaları yer almaktadır. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere aynı zeminde bulunan ve uzunluğu a^2 cm olan tuğlalardan 9 tanesi ile uzunluğu b^2 cm olan tuğlalardan 36 tanesinin yükseklikleri eşittir.

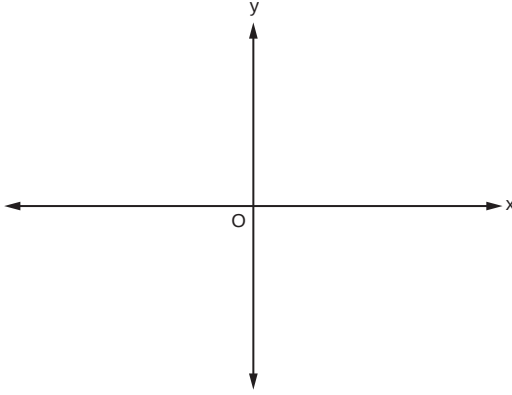
Buna göre $\frac{b}{a}$ değerini bulunuz.

- Kenar sayısı n olan çokgenin içine yazılan b sayısı ile oluşturulan sembol, $b^{\frac{1}{n-1}}$ ($b \in \mathbb{R}$) ifadesinin değerine eşittir. Örneğin  $= 3^{\frac{1}{4}}$ tür.

Buna göre  $=$  eşitliğini sağlayan x gerçekteki sayısının değerini bulunuz.

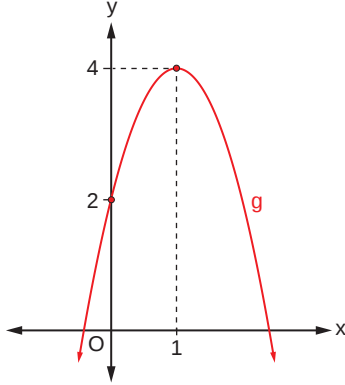
4. $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [-6, 2]$, $f(x) = 4 \cdot \cos 3x - 2$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon verilmiştir.

Buna göre f fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki dik koordinat sistemine çiziniz ve f fonksiyonuna ait tabloda verilen nitel özellikleri bularak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.



Nitel Özellikler	$f(x) = 4 \cdot \cos 3x - 2$
Sıfırları	
Teklik-Çiftlik	
Maksimum Noktası ve Değeri	
Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlık-Azalanlık	
Periyodu	

- 5.



Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyon grafiğine $k \cdot f(ax + b) + r$ ($a, b, k, r \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0, k \neq 0$) dönüşümü yapılarak yandaki görsele yer alan g fonksiyonunun grafiği elde ediliyor. g fonksiyonunun maksimum değeri 4'tür.

Buna göre k, a, b ve r gerçekte sayılarının değerlerini bulunuz.

6. Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bulunuz ve ilgili boşlukları doldurunuz.

Nitel Özellikler	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -x + 1$	$g: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^-$ $g(x) = -\sqrt{4x + 8}$	$h: \mathbb{R} \rightarrow [-3, \infty)$ $h(x) = x^2 - 6x + 6$	$k: (-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ $k(x) = \frac{1}{3+x} + 3$
Tanım Kümesi				
Görüntü Kümesi				
Bire Bir Olma Durumu				
Örten Olma Durumu				
Maksimum Noktası ve Değeri				
Minimum Noktası ve Değeri				
Teklik-Çiftlik				
Artanlık-Azalanlık				
Sıfırları				
İşareti	(+)			
	(-)			

4.1. ÜSTEL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

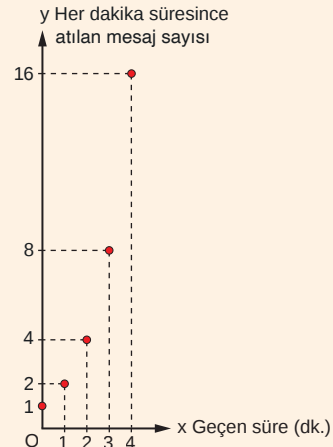
Konuya Başlarken

Bir okuldaki insan hakları kulübü, T.C. Millî Eğitim Bakanlığının yürütmekte olduğu "Okul Öğrenci Kulüpleri Sosyal Sorumluluk Programı ve Toplum Hizmeti Uygulama Projesi" kapsamında bir çalışma yapmak istemiştir. Kulüp, bu doğrultuda kadın-erkek eşitliği konusunda farkındalık oluşturulmasını da amaçlayarak bir etkinlik düzenlemiştir. Etkinlikte ilk olarak kulüp başkanı farkındalık mesajını paylaşır. Ardından mesajı alan her öğrenci, takip eden ilk dakika içerisinde aldıkları mesajı iki farklı öğrenciye gönderir.

Her öğrencinin mesaj gönderdiği bu etkinlikte geçen süreye bağlı olarak her dakika içerisinde gönderilen mesaj sayısı Tablo 4.1'de, grafik temsili ise Grafik 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1: Her Dakika Süresince Atılan Mesaj Sayısı

Geçen Süre (dk.)	Her Dakika Süresince Atılan Mesaj Sayısı
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16



Grafik 4.1: Her dakika süresince atılan mesaj sayısına ait grafik

Buna göre

1. Tablo ve grafik incelenerek üslü ifadelerle ilişkilendirilebilen bu duruma ait bir fonksiyon nasıl oluşturulabilir? Fikirlerinizi yazınız ve arkadaşlarınızla paylaşınız.
2. Atılan ilk mesajın 9 dakika sonra tüm öğrencilere ulaştığı bu etkinlikte etkinlik süresi, ilk mesajın atıldığı dakika ve 9. dakikadaki mesajın ulaştığı kişi sayısı gibi ifadeler; verilen grafiğin hangi nitel özellikleri ile ilişkilendirilebilir? Bu konudaki fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız ve fikirleriniz üzerine tartışınız.

Arkeoloji, biyoloji, coğrafya, ekonomi, fizik, kimya ve mühendislik gibi farklı alanlarda karşılaşılan ve katlanarak çoğalan veya azalan değerlere sahip olmasından dolayı üslü ifadelerle gösterilebilen ilişkiler; gerçek yaşamın birçok noktasında karşımıza çıkar. Bu tür durumlarda özellikle çoğalma ve azalma süreçlerinin süreklilik gösterdiği olayların daha doğru modellenebilmesi için özel bir sayı olan Euler sayısı (e) kullanılır. Euler sayısı veya kısaca e sayısı, π sayısı gibi sabit bir matematiksel değerdir. e sayısı irrasyonel bir sayıdır ve değeri yaklaşık 2,7182 olarak ifade edilir.

Üstel Referans Fonksiyonlar

Üstel fonksiyonlar, sabit oranlı artış veya azalış gösteren değişimleri ifade etmek amacıyla kullanılan matematiksel modellerdir. Üstel fonksiyonlar, doğrusal olmayan grafikleri sayesinde ani ve hızlı değişimlerin gözlemlendiği süreçlerin analizinde etkili bir şekilde kullanılır.

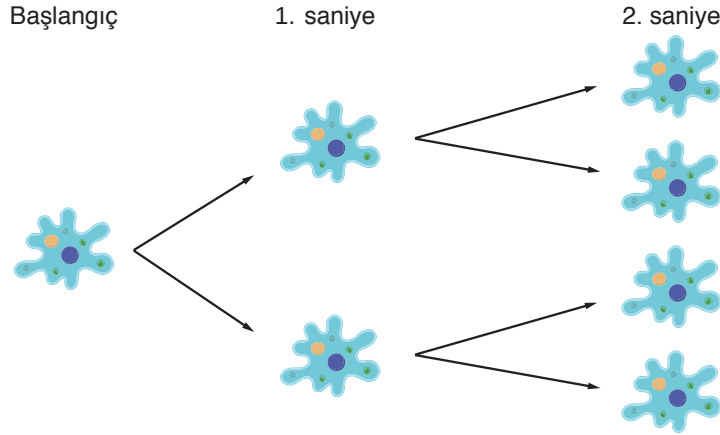
1. Uygulama



Üstel Referans Fonksiyonun Tanımlanması

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Aşağıda uygun ortam ve sıcaklıktaki bir bakteri hücresinin her bir saniye süresince ikiye bölünerek çoğalması modellenmiştir.



Buna göre

- a) Bakteri artış modellemesinde geçen süreler sonunda ortamda bulunan bakteri sayılarını bularak Tablo 1'de boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Süre (sn.)	0	1	2	4	5	10	15	20	25	40	50	60
Bakteri sayısı	1	2										

- b) Tablo 1'deki bilgilerden yararlanarak, geçen süreye (t) bağlı olarak ortamdaki bakteri sayılarını veren f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız ve fonksiyonun grafiğini çiziniz.

2. Uygun ortam ve sıcaklıkta bir bakteri hücresinin her bir saniye süresince bölünerek 4 katına çıktığı durum inceleniyor. Buna göre
 - a) 1. soruda yapılan çalışmaya benzer bir modelleme yaparak g fonksiyonunu tanımlayınız ve g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.





b) g fonksiyonunun ilk 5 saniyedeki bakteri sayısını hesaplayınız ve fonksiyonun grafiğini çizin.

3. 1 ve 2. sorularda elde edilen grafik temsilini ve cebirsel temsili inceleyiniz. Benzerlik ve farklılıkları bularak yorumlayınız.

4. "Bir radyoaktif maddenin yarılanma süresi, radyoaktif maddenin başlangıçtaki miktarının yarıya inmesi için gereken süreyi ifade eder."

Buna göre

a) Yarılanma süresi 5 yıl olan 256 kilogramlık bir radyoaktif maddenin yıllara göre kalan madde miktarını bularak Tablo 2'deki ilgili boşlukları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Süre (yıl)	5	10	15	20	25	30
Kalan Radyoaktif Madde Miktarı (kg)	128					

b) Tablo 2'deki verileri kullanarak geçen süre t, kalan madde miktarı h (t) olacak şekilde h fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız ve grafiğini çizin.

5. 1 ve 4. sorularda elde edilen grafik temsilini ve cebirsel temsili inceleyiniz. Benzerlik ve farklılıkların sebeplerini yorumlayınız.

6. Yapılan çalışmadan yararlanarak x gerçek sayısına bağlı üstel referans fonksiyonların nasıl tanımlanabileceğine dair fikirleriniz üzerine arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

1. Örnek

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonları ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki Tablo 1 ve Tablo 2'yi x sayılarına karşılık gelen fonksiyon değerlerini ve $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere A_p ve B_p noktalarını bularak doldurunuz.

Tablo 1

x	$y = f(x) = 3^x$	$A_p(x, y)$
-2		
-1		
0		
1		
2		

Tablo 2

x	$y = g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$B_p(x, y)$
-1		
0		
1		
2		
3		

2. Tablolardaki sıralı ikililerden yararlanarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

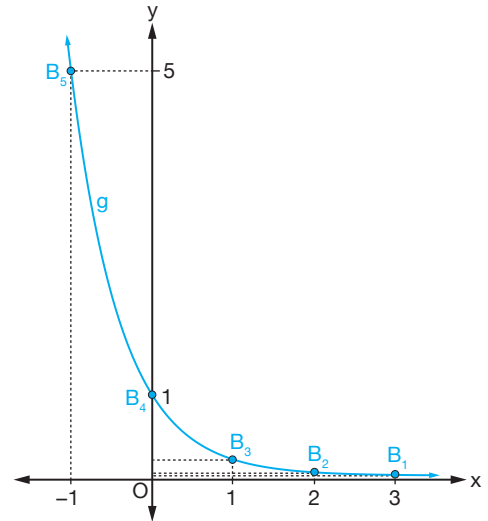
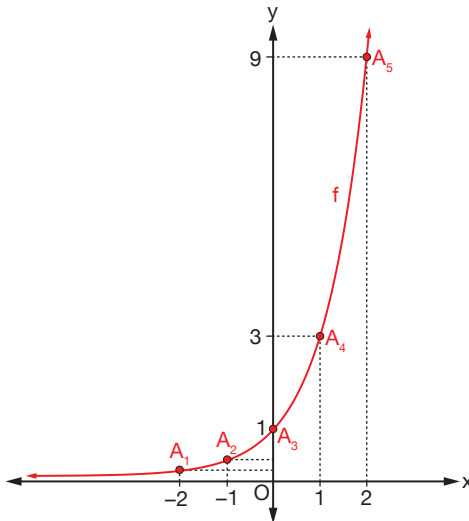
Çözüm

1.

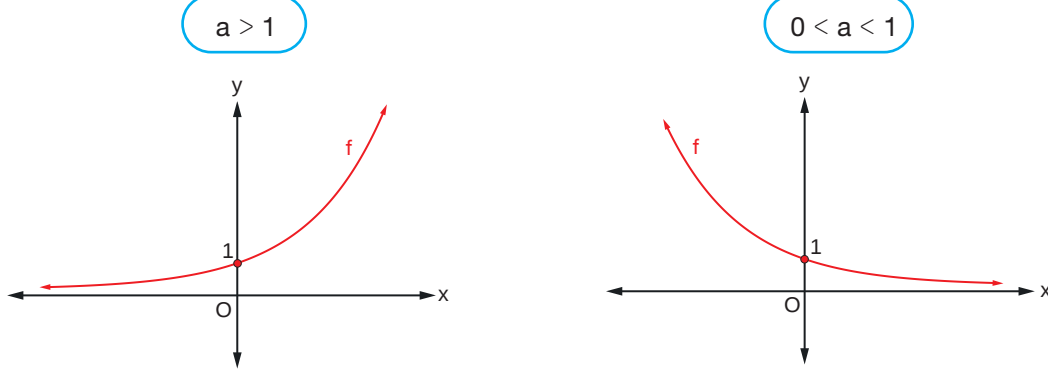
x	$y = f(x) = 3^x$	$A_p(x, y)$
-2	$\frac{1}{9}$	$A_1\left(-2, \frac{1}{9}\right)$
-1	$\frac{1}{3}$	$A_2\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
0	1	$A_3(0, 1)$
1	3	$A_4(1, 3)$
2	9	$A_5(2, 9)$

x	$y = g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$B_p(x, y)$
-1	5	$B_1(-1, 5)$
0	1	$B_2(0, 1)$
1	$\frac{1}{5}$	$B_3\left(1, \frac{1}{5}\right)$
2	$\frac{1}{25}$	$B_4\left(2, \frac{1}{25}\right)$
3	$\frac{1}{125}$	$B_5\left(3, \frac{1}{125}\right)$

2.



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$) şeklinde tanımlanan fonksiyona **üstel referans fonksiyon** denir. Bu fonksiyondaki a sayısına üstel fonksiyonun tabanı denir. Üstel referans fonksiyonun grafik temsilleri aşağıda verilmiştir.



2. Örnek

- $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = (2n - 6)^x$ ve $g(x) = (7 - n)^x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar üstel referans fonksiyon olduğuna göre n nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{1-m}{2m-11}\right)^x$ şeklinde tanımlı f üstel referans fonksiyon olduğuna göre m nin kaç farklı tam sayı değeri alabileceğini bulunuz.

Çözüm

- f üstel referans fonksiyon olduğu için $2n - 6 > 0$ ve $2n - 6 \neq 1$ olmalıdır. $2n - 6 > 0$ ise $2n > 6$ ve $2n - 6 \neq 1 \Rightarrow n > 3$ ve $2n \neq 7 \Rightarrow n \neq \frac{7}{2}$ olur. g fonksiyonu da üstel referans fonksiyon olduğu için $7 - n > 0$ ve $7 - n \neq 1$ olmalıdır. Buradan $7 - n > 0$ ise $7 > n$ ve $7 - n \neq 1 \Rightarrow n > 3$ ve $n \neq 6$ elde edilir. Buna göre $n \in (3, 7) - \left\{\frac{7}{2}, 6\right\}$ olur ve n nin alabileceği tam sayı değerleri 4 ve 5 olarak bulunur. Buradan n nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı 9 olur.
- f üstel referans fonksiyon olduğu için $\left(m \neq \frac{11}{2}\right) \frac{1-m}{2m-11} > 0$ ve $\frac{1-m}{2m-11} \neq 1$ olmalıdır. İşaret tablosu yapılarak

m	$-\infty$	1	$\frac{11}{2}$	$+\infty$
$1 - m$	+	○	-	-
$2m - 11$	-	-	○	+
$\frac{1-m}{2m-11}$	-	○	+	-

m nin değer aralığı $\left(1, \frac{11}{2}\right)$ olarak bulunur. $\frac{1-m}{2m-11} \neq 1$ olduğundan $m \neq 4$ elde edilir. Buna göre m sayısı 2, 3 ve 5 tam sayı değerlerini alır. Bu nedenle m nin alabileceği 3 farklı tam sayı değeri vardır.

Sıra Sizde 1

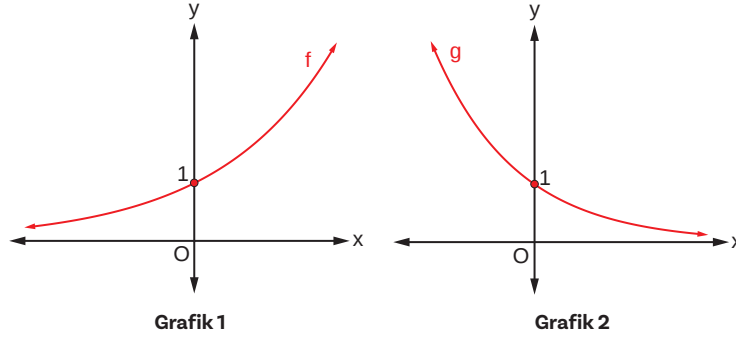
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = (-m^2 - 2m + 8)^x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu üstel referans fonksiyondur.

Buna göre m nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

2. Uygulama**Üstel Referans Fonksiyonların Nitel Özellikleri**

Verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

Aşağıda $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ ve $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonlarına ait grafikler sırası ile Grafik 1 ve 2 olarak verilmiştir.



1. f ve g üstel referans fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.
2. f ve g üstel referans fonksiyonların bire birliğini ve örtenliğini inceleyiniz.
3. f ve g üstel referans fonksiyonların varsa sıfırlarını bulunuz ve grafikleri inceleyerek fonksiyonların pozitif-negatif olduğu aralıkları belirtiniz.
4. f ve g üstel referans fonksiyonların artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz. Elde ettiğiniz aralıkları fonksiyonların cebirsel temsillerindeki taban değerleri ile ilişkilendirerek yorumlayınız.
5. f ve g üstel referans fonksiyonların varsa maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri veren noktalarını bulunuz.
6. f ve g üstel referans fonksiyonların tek-çift fonksiyon olma durumlarını inceleyiniz.

3. Örnek

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(x) = (m - 2)^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun artanlığını-azalanlığını m nin aldığı değerlere göre inceleyiniz.

Çözüm

Gerçek sayılarda $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan üstel fonksiyonlar, a değeri 1'den büyük olduğunda artan, a değeri 0 ile 1 arasında olduğunda azalan özellik gösterir.

Buna göre g fonksiyonun tabanı olan $m - 2$ ifadesi 1'den büyükse ($m - 2 > 1$), $m > 3$ koşuluyla g fonksiyonu artandır.

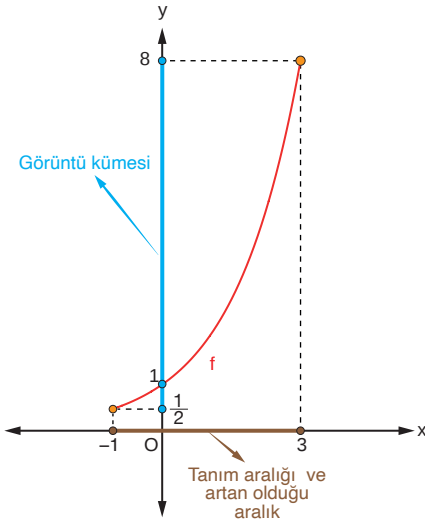
Tabanın 0 ile 1 aralığında bulunduğu ($0 < m - 2 < 1$) durumlarda $2 < m < 3$ koşuluyla g fonksiyonu azalandır.

4. Örnek

$f: [-1, 3] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 8\right]$, $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyonun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Verilen tanım aralığı dikkate alınarak çizilmiş $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. f fonksiyonun tanım kümesi $[-1, 3]$, görüntü kümesi $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$ dir.



Grafik incelendiğinde tanım aralığındaki her x değerine karşılık gelen f değerleri de farklı olduğundan f , bire bir fonksiyondur. Değer aralığındaki her f değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık geldiğinden f fonksiyonu örtendir.

$f(x) = 0$ yapan x değeri olmadığından f fonksiyonunun sıfırı yoktur. f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta daima pozitif değerler alır.

$\forall x_1, x_2 \in [-1, 3]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $[-1, 3]$ nda artandır. f fonksiyonunun verilen aralıkta maksimum değeri 8'dir ve bu değeri $x = 3$ 'te alır.

Fonksiyonun minimum değeri $\frac{1}{2}$ 'dir ve bu değeri $x = -1$ 'de alır. f üstel fonksiyonu tek ya da çift fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 2

$f: (-\infty, 2] \rightarrow \left[\frac{1}{9}, \infty\right)$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

Üstel Referans Fonksiyondan Türetilen Fonksiyonlar

Üstel referans fonksiyonlardaki dönüşümler incelenerek türetilen bu fonksiyonların grafiklerindeki değişiklikler (germe, sıkıştırma, ötelenme ve simetri) rahatlıkla analiz edilebilir.

3. Uygulama



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$) Şeklinde Tanımlı Üstel Referans Fonksiyondan Türetilen

$g(x) = k \cdot f(mx + r) + s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) Şeklinde Tanımlı Üstel Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

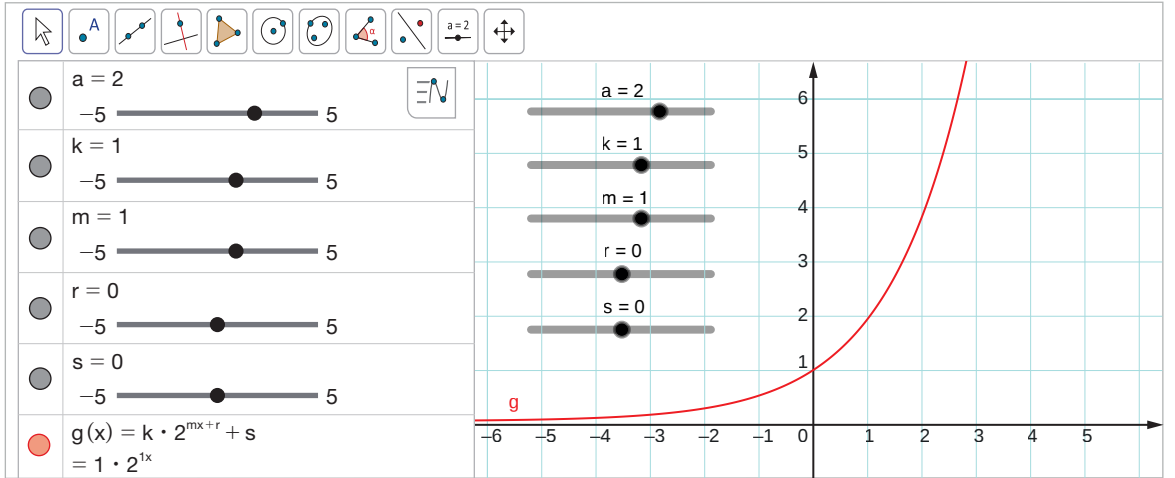
1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a , k , m , r ve s sürgülerini tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: a sürgüsünü 2 seçerek cebir menüsünden **Giriş** bölümüne $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$ yazınız.

3. adım: Sürgüleri $k = 1, m = 1, r = 0, s = 0$ seçerek $f(x) = 2^x$ üstel referans fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



a) $m = 1, r = 0, s = 0$ ve $k \neq 0$ iken k sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyon İsmi	k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Üstel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$	Üstel Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Üstel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 3$	$h(x) = 3 \cdot 2^x$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen değeri 3 ile çarpma	3 kat dikey germe
n	$k = -1$			
t	$k = 2$			
p	$k = -2$			





- b) $m = 1, r = 0$ ve $k \neq 0$ iken k ve s sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz ve elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyon İsmi	k ve s Sürgüsünün Değeri	Oluşan Üstel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$	Üstel Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Üstel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$ ve $s = 1$	$h(x) = 2^x + 1$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen fonksiyon değerine 1 ekleme	y eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme
n	$k = -1$ ve $s = 3$			
t	$k = 3$ ve $s = -2$			
p	$k = -4$ ve $s = -\frac{1}{2}$			

- c) $m \neq 0, k \neq 0$ ve $r = 0$ iken k, s ve m sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz ve elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak Tablo 3'te boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyon İsmi	k, s ve m Sürgüsünün Değeri	Oluşan Üstel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$	Üstel Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Üstel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 0$ ve $m = 3$	$h(x) = 2^{3x}$	Her bir bağımsız değişkeni 3 ile çarpma	3 kat yatay sıkıştırma
n	$k = -2, s = 2$ ve $m = 3$			
t	$k = 1, s = 0$ ve $m = 2$			
p	$k = -4, s = -\frac{1}{2}$ ve $m = \frac{1}{3}$			



- ç) $m \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k , s , m ve r sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4

Fonksiyon İsmi	k , s , m ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Üstel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$	Üstel Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Üstel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 1,$ $m = 1$ ve $r = -3$	$h(x) = 2^{x-3} + 1$	Her bir bağımsız değişkenin 3 eksiğinin fonksiyon değerine 1 ekleme	x eksenini boyunca pozitif yönde 3 birim, y eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme
n	$k = 2, s = 0,$ $m = 2$ ve $r = 3$			
t	$k = 3, s = -1,$ $m = 2$ ve $r = 1$			
p	$k = -1, s = 1,$ $m = -2$ ve $r = 0$			

2. $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyona uygulanan dönüşümlerle elde edilen üstel fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini bularak Tablo 5'te boş bırakılan kısmı örnekteki gibi doldurunuz. Fonksiyonların grafik temsillerini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

Tablo 5

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsil	Grafik Temsili
y eksenini boyunca negatif yönde 2 birim öteleme	$g(x) = 2^x - 2$	
3 kat dikey sıkıştırma ve x eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme		



3. $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle Tablo 6 ve Tablo 7'de cebirsel temsilleri üstel fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

Tablo 6

$h: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty), h(x) = 3 \cdot 2^{x-4} + 1$	
Nitel Özellikler	Varsayımlar
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Bire Birliği	
Örtenliği	Örten bir fonksiyondur.
Sıfırı	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Tekliği-Çiftliği	

Tablo 7

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s \ (a > 0 \text{ ve } a \neq 1) \ (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$	
Nitel Özellikler	Varsayımlar
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Bire Birliği	Bire bir fonksiyondur.
Örtenliği	
Sıfırı	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Tekliği-Çiftliği	





4. Aşağıda $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyondan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.
- a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımları kullanarak çiziniz, Tablo 8'i istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 8

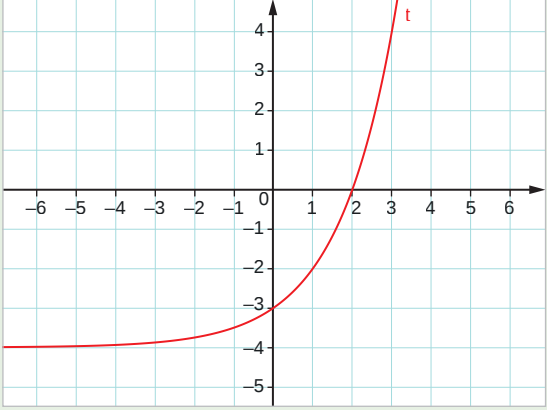
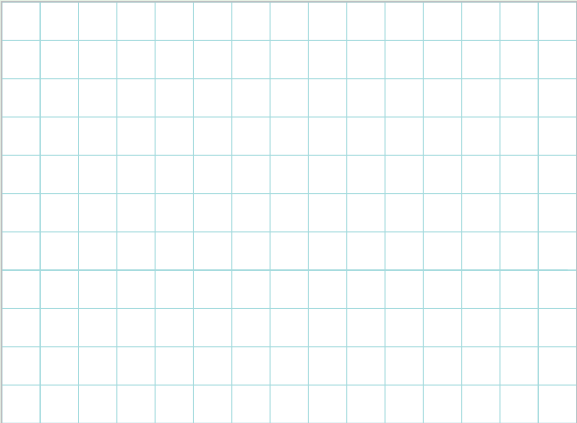
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$h(x) = 3 \cdot 2^{x+1}$	Grafik		
	Cebirsel	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tüm gerçek sayılar için tanımlı olduğu görülmektedir. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonun görüntü aralığının $(0, \infty)$ olduğu görülmektedir. Görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ dir.
$n(x) = 2^{3x} - 1$	Grafik		
	Cebirsel	f üstel referans fonksiyonu $\mathbb{R}$ de tanımlıdır. $h(x) = 3 \cdot f(x+1) = 3 \cdot 2^{x+1}$ olduğu için h fonksiyonunun da tanım kümesi $\mathbb{R}$ olur.	f üstel referans fonksiyonunun görüntü kümesi $(0, \infty)$ dir. $h(x) = 3 \cdot f(x+1) = 3 \cdot 2^{x+1}$ olduğu için h fonksiyonunun da görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ olur.





- b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz, Tablo 9'u istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 9

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Fonksiyonun Sıfırları	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$t(x) = 2^x - 4$	Grafik		
	Cebirsel	$t(x) = 0$ için $2^x - 4 = 0 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ olur. t fonksiyonunun sıfırı $x = 2$ olur.	Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun değerlerinin $\forall x \in \mathbb{R}$ için arttığı görülür. Bu durumda t fonksiyonu artandır. t fonksiyonunun tabanı 2'dir. t fonksiyonunun tabanı 1'den büyüktür. Bundan dolayı t fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için artandır.
$p(x) = -2^{-x} + 8$	Grafik		
	Cebirsel		



5. Yaptığınız çalışmalardan elde ettiğiniz nitel özellikleri kullanarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f üstel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s$ ($a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$) ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) üstel fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.
6. Oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f üstel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s$ ($a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$) ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) üstel fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeyi sözel veya cebirsel olarak ifade ediniz.
7. Aşağıdaki soruyu cevaplayarak elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını değerlendiriniz.

Üniversite harçlığını çıkarmak için yaz tatilinde çalışmayı tercih eden Emre, kazandığı 50 000 TL'yi 3 yıl boyunca banka hesaplarında değerlendirmek istemektedir. Banka, müşterilerine farklı kâr payı hesaplama planları sunmaktadır. Aşağıdaki tabloda iki farklı planın yıllık oranları verilmiştir.

Plan	1. Yıl Kâr Payı Oranı	2. Yıl Kâr Payı Oranı	3. Yıl Kâr Payı Oranı	Hesaplama Türü
Plan A	%4	%4	%4	Her yıl %4 oranında bileşik (birikimli) kâr payı uygulanmaktadır.
Plan B	%3	%3	%3	Her yıl %3 oranında bileşik (birikimli) kâr payı + 3 yılın sonunda toplam kârın %20'si kadar bonus eklenir.

Buna göre

- a) Kâr payı hesaplama planlarının ifade ettiği fonksiyonların cebirsel temsilini yazınız.
- b) Emre'nin iki plandan elde edeceği geliri ayrı ayrı hesaplayınız ve hangi teklifi kabul etmesi durumunda daha fazla kazanç sağlayacağını bulunuz.

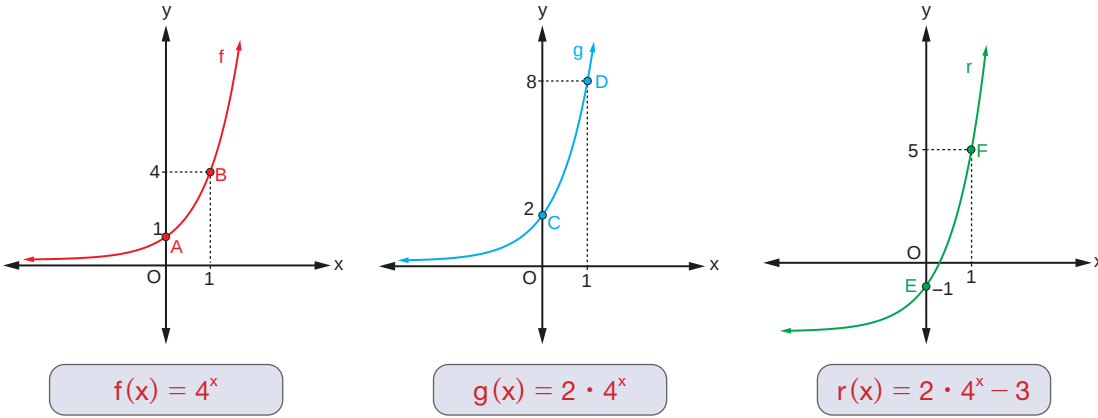
5. Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 4^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyon olmak üzere $g(x) = 2 \cdot f(x)$, $h(x) = f(x) - 3$ ve $r(x) = 2 \cdot f(x) - 3$ şeklinde tanımlanan g , h ve r fonksiyonları ile ilgili aşağıdaki işlemleri yapınız.

1. g , h ve r fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.
2. r fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1. $g(x) = 2 \cdot f(x)$ olduğu için $g(x) = 2 \cdot 4^x$ elde edilir.
 $h(x) = f(x) - 3$ olduğu için $h(x) = 4^x - 3$ elde edilir.
 $r(x) = 2 \cdot f(x) - 3$ olduğu için $r(x) = 2 \cdot 4^x - 3$ elde edilir.
2. r fonksiyonunun grafiği çizilirken f üstel referans fonksiyonunun grafiği 2 kat dikey gerilir. Sonra elde edilen grafik, y eksenı boyunca negatif yönde 3 birim ötelenir. Buna göre r fonksiyonunun grafiği adım adım aşağıda verilmiştir.



6. Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 6^x$ olmak üzere f üstel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = f(3x)$, $h(x) = f(x - 1)$ ve $k(x) = f(3x - 1)$ şeklinde tanımlanan g , h ve k fonksiyonları ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. g , h ve k fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.
2. k fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

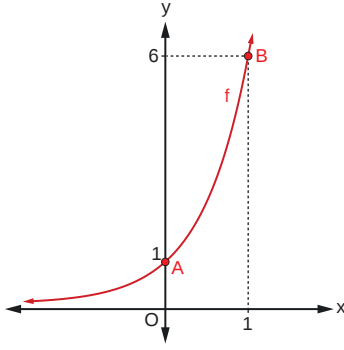
Çözüm

1. $g(x) = f(3x)$ olduğu için $g(x) = 6^{3x}$ elde edilir.
 $h(x) = f(x - 1)$ olduğu için $h(x) = 6^{x-1}$ elde edilir.
 $k(x) = f(3x - 1)$ olduğu için $k(x) = 6^{3x-1}$ elde edilir.
2. k fonksiyonunun grafiği çizilirken f üstel referans fonksiyonunun 3 kat yatay sıkıştırılır. Elde edilen grafik x eksenı boyunca $\frac{1}{3}$ birim pozitif yönde ötelenir.

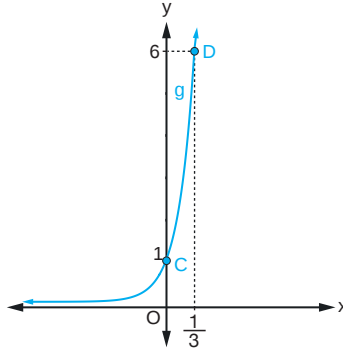




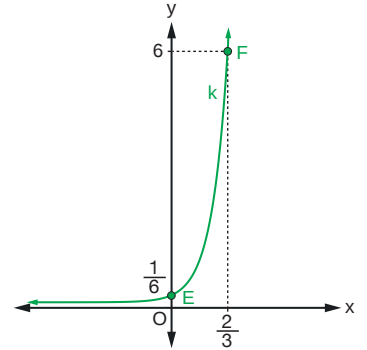
Buna göre k fonksiyonunun grafik temsili adım adım aşağıda verilmiştir.



$$f(x) = 6^x$$



$$g(x) = 6^{3x}$$

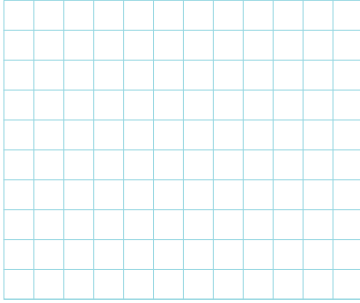


$$k(x) = 6^{3x-1}$$

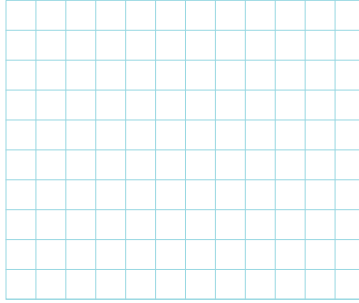
Sıra Sizde 3

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyondan türetilen $g(x) = 2^x + 3$, $h(x) = 2^{2x-1}$ ve $t(x) = 2^{2x-1} + 3$ şeklinde tanımlanan fonksiyonların grafik temsillerini aşağıda boş bırakılan alanlara çizin.

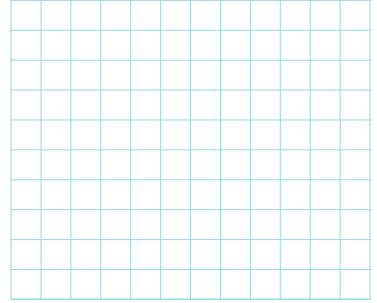
g fonksiyonunun grafiği



h fonksiyonunun grafiği



t fonksiyonunun grafiği



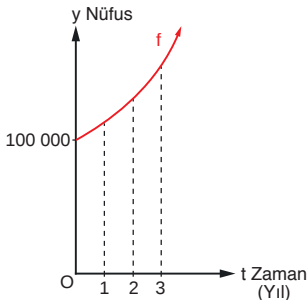
7. Örnek

Bir bölgedeki nüfus, üstel fonksiyonlarla matematiksel olarak modellenabilmektedir.

Başlangıçta 100 000 nüfusa sahip olan A şehrinin zamana (t , yıl) bağlı nüfus değişim fonksiyonu $f(t) = 100\,000 \cdot (1,02)^t$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f üstel fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

A şehrinin zamana bağlı nüfus değişimini veren f fonksiyonunun grafik temsili aşağıda verilmiştir.



Geçen zamana bağlı olarak tanımlanan f fonksiyonunun tanım kümesi $[0, \infty)$ olur, görüntü kümesi ise $[100\,000, \infty)$ olur.

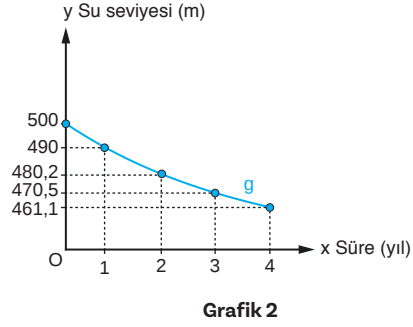
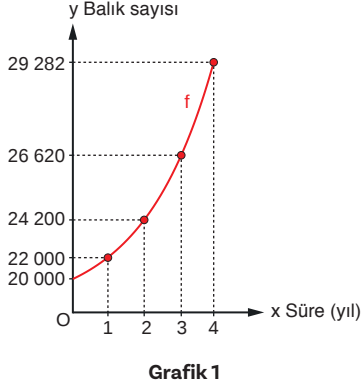
Nüfus, daima pozitif bir sayı olacağı için f fonksiyonu daima pozitifdir ve f fonksiyonunun sıfırı yoktur. f fonksiyonunun tabanındaki sayı $1,02 > 1$ olduğundan f fonksiyonu artandır.

f fonksiyonunun minimum değeri 100 000, minimum değerini veren nokta 0'dır. Maksimum noktası ve maksimum değeri yoktur.

Grafik incelendiğinde f fonksiyonu bire birdir ve örten değildir. f fonksiyonu tanım aralığında ne tek ne de çift fonksiyondur.

Sıra Sizde 4

Bir göldeki balık popülasyonu her yıl yaklaşık %10 oranında artmakta, göldeki su seviyesi ise her yıl yaklaşık olarak %2 oranında azalmaktadır. 2024 yılında göldeki balık popülasyonu 20 000 olarak tespit edilmiş, gölün su seviyesi ise 500 metre olarak ölçülmüştür. 2024-2028 yılları arasında balık sayılarındaki artışı gösteren üstel fonksiyon Grafik 1'de, su seviyesindeki azalışı gösteren üstel fonksiyon Grafik 2'de verilmiştir.



Buna göre Grafik 1 ve Grafik 2'yi inceleyerek f ve g fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Cebirsel gösterimlerini bulunuz.
2. Tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.
3. Bire bir olup olmadıklarını inceleyiniz.
4. Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
5. İşaretlerinin pozitif (+) ve negatif (-) olduğu aralıkları bulunuz.
6. Maksimum-minimum noktaları ve değerlerini bulunuz.
7. Tek-çift fonksiyon olma durumlarını inceleyiniz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Kontrol Noktası

1. k, m, r ve $s \in \mathbb{R}$ ($m \neq 0, k \neq 0, s > 0$ ve $r > 0$) olmak üzere $f(x) = a^x$ ($a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$) şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s$ üstel fonksiyonunun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır.
 1. adım: $f(x) = a^x$ üstel referans fonksiyonu x eksenini boyunca negatif yönde r birim ötelenerek $b(x) = a^{x+r}$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
 2. adım: $b(x) = a^{x+r}$ fonksiyonunun grafiği $|m|$ değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, $|m|$ değeri azaldıkça yatayda gerilerek $c(x) = a^{mx+r}$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
 3. adım: $c(x) = a^{mx+r}$ fonksiyonunun değerini k katına eşleyen $d(x) = k \cdot a^{mx+r}$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
 4. adım: $d(x) = k \cdot a^{mx+r}$ fonksiyonu y eksenini boyunca pozitif yönde s birim ötelenerek $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. k, m, r ve $s \in \mathbb{R}$ ($m \neq 0, k \neq 0, s > 0$ ve $r > 0$) olmak üzere gerçekte sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s$ ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$) üstel fonksiyonunun nitel özellikleri için aşağıdaki sonuçlara varılır.
 - g fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
 - $k > 0$ için g fonksiyonunun görüntü kümesi (s, ∞) olur.
 $k < 0$ için g fonksiyonunun görüntü kümesi $(-\infty, s)$ olur.
 - g fonksiyonu bire birdir.
 - Artanlık-azalanlık incelemesi
 - » Üstel fonksiyonların tabanlarındaki sayı $a > 1$ olduğunda aşağıdaki durum gerçekleşir.

$k \backslash m$	$m > 0$	$m < 0$
$k > 0$	Artan	Azalan
$k < 0$	Azalan	Artan

- » Üstel fonksiyonların tabanlarındaki sayı $0 < a < 1$ olduğunda aşağıdaki durum gerçekleşir.

$k \backslash m$	$m > 0$	$m < 0$
$k > 0$	Azalan	Artan
$k < 0$	Artan	Azalan

Ek soruların yer aldığı 1. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Üstel Fonksiyonlar ve Üstel Fonksiyonların Nitel Özellikleri)



Alıştırmalar

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{2-m}{3m+15}\right)^x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu üstel fonksiyondur.

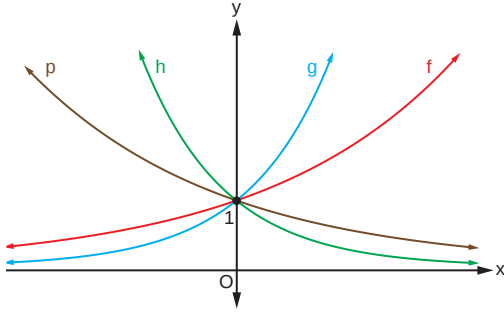
Buna göre m nin kaç farklı tam sayı değeri alabileceğini bulunuz.

2. Üstel referans fonksiyondan türetilmiş g fonksiyonu $g: [-4, -1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4^{-x} + 1$ şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre g fonksiyonunun nitel özelliklerini bu-
larak tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Nitel Özellikler		g
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
Bire Bir Olma Durumu		
Örten Olma Durumu		
Maksimum Noktası ve Değeri		
Minimum Noktası ve Değeri		
Teklik-Çiftlik		
Artanlık-Azalanlık		
Sıfırı		
İşareti	(+)	
	(-)	

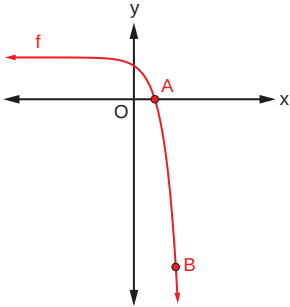
- 3.



Yanda $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$, $h(x) = c^x$ ve $p(x) = d^x$ üstel referans fonksiyonların grafikleri verilmiştir.

Buna göre a, b, c ve d pozitif gerçak sayılarını
küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

- 4.



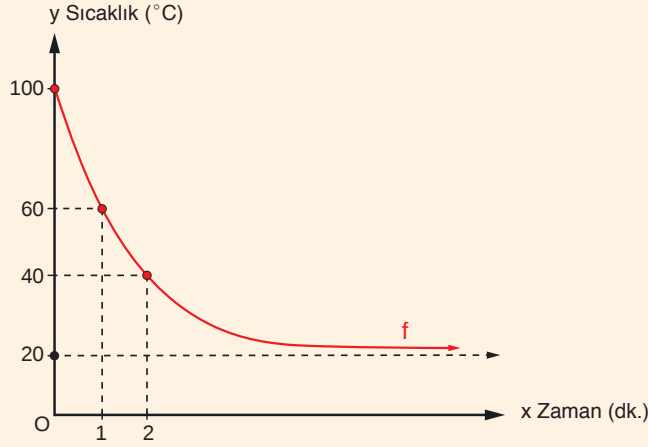
Yanda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot 5^{x-1} + b$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyonu-
nun grafiği verilmiştir.

**A(1, 0) ve B(2, -8) noktalarından geçen f üstel fonksiyonu için
 $a - b$ değerini bulunuz.**

4.2. ÜSTEL FONKSİYONLARIN TERS FONKSİYONLARI

Konuya Başlarken

Mühendislik alanında özellikle termodinamik ve soğutma sistemleri üzerine yapılan çalışmalarda sıcaklık değişiminin zamana bağlı olarak belirlenmesinde e tabanlı üstel fonksiyonlardan yararlanılmaktadır. Başlangıçta $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ sıcaklığa sahip bir cismin belirli bir ortamda soğumaya bırakılması durumunda oluşan e tabanlı bir referans fonksiyonun dönüşümüyle elde edilen f üstel fonksiyonu Grafik 4.2'de verilmiştir.



Grafik 4.2: f fonksiyonunun grafiği

Grafiği inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Cismin 3. dakikadaki sıcaklık değerinin hesaplanmasında kullanılabilecek matematiksel modele ve çözüm yöntemlerine ilişkin fikirlerinizi yazınız. Fikirleriniz üzerine sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.
2. Sıcaklığın $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ 'a düşmesi için geçen sürenin nasıl belirlenebileceğine ilişkin fikirlerinizi yazınız. Bu süreçte kullanılacak matematiksel model ve çözüm yöntemleri ile ilgili fikirleriniz üzerine sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

Logaritmik Referans Fonksiyon

Üstel referans fonksiyonlar, sabit oranlı artış veya azalış süreçlerini modellemektedir. Bu tür süreçlerde artış oranının belirlenmesi gerektiğinde üstel referans fonksiyonun tersi olan logaritmik referans fonksiyon kullanılır.

4. Uygulama



Üstel Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyondan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. a) Tablo 1 ve Tablo 2’de verilen g ve h üstel referans fonksiyonlarına ait noktaları ve bağımlı-bağımsız değişkenlerin yer değiştirmesiyle oluşturulan yeni ilişkiye ait noktaları kullanarak tablolardaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz. Bu noktaları yanlarında verilen dik koordinat sisteminde işaretleyiniz ve noktaları uygun şekilde birleştirerek grafiklerini çiziniz.

Tablo 1

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 2^x$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirme- siyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	(x, y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	(x, y)	
-1				-1		
0				0		
1						
2						
3						

Tablo 2

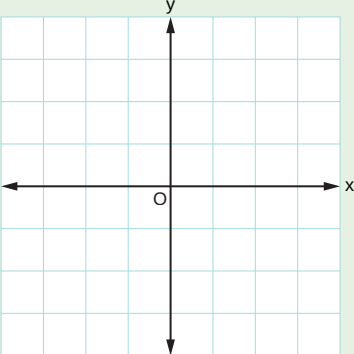
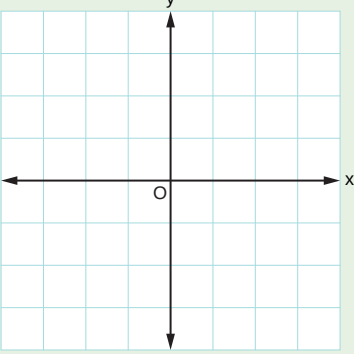
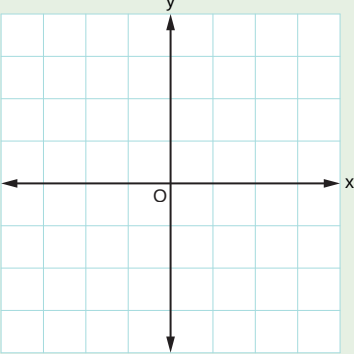
$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $h(x) = 3^x$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirme- siyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	(x, y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	(x, y)	
-1						
0						
1						
2				2		
3				3		

- b) g ve h üstel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmadığını sınıf arkadaşlarınız ile tartışarak görüşünüzü paylaşınız. Elde ettiğiniz varsayımları yazınız.



2. a) Cebirsel temsilleri verilen üstel fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin yerleri değiştirilerek farklı tanım ve değer kümesine göre oluşan yeni fonksiyonların bulunması ile ilgili Tablo 3'teki boşluklara uygun şekilde doldurunuz. Elde edilen noktaları yanlarında verilen boş dik koordinat sisteminde işaretleyiniz ve noktaları uygun şekilde birleştirerek grafik temsillerini çiziniz.

Tablo 3

$g: \mathbb{R} \rightarrow (-1, \infty)$ $g(x) = -1 + 3 \cdot 2^x$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirme-siyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	A(x, y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	B(x, y)	
-1						
-2						
0						
1						
2						
$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $h(x) = 5^x + 1$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirme-siyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	C(x, y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	D(x, y)	
-1						
-2						
0						
1						
2						
$n: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 2)$ $n(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirme-siyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	E(x, y)	Bağımsız Değişken (x)	Bağımlı Değişken (y)	F(x, y)	
-1						
-2						
0						
1						
2						



- b) Tablo 3'teki grafik temsilleri inceleyerek üstel referans fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların hangi durumlarda terslerinin de fonksiyon olabileceği hakkında genellemeler yapınız.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ şeklinde tanımlanan üstel referans fonksiyonların ters fonksiyonları $f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir ve bu fonksiyonlar logaritmik referans fonksiyon olarak adlandırılır.

3. a) Tablo 4'te f, g ve h üstel referans fonksiyonlarının cebirsel temsilleri verilmiştir. Bu fonksiyonların ve ters fonksiyonların grafik temsillerini matematik yazılımından yararlanarak çiziniz.

Tablo 4

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 7^x$	
Fonksiyonun Grafik Temsili	Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
Fonksiyonun Grafik Temsili	Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$h: [1, \infty) \rightarrow [13, \infty), h(x) = 10^x + 3$	
Fonksiyonun Grafik Temsili	Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili





b) Tablo 4'teki grafik temsilleri dikkate alarak genellemeleriniz ile varsayımlarınızı karşılaştırınız. Karşılaştırmada elde ettiğiniz sonuçları yazınız.

4. Üstel referans fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların terslerinin cebirsel temsillerinin birer fonksiyon olmasına ilişkin şartlara ait önermenizi matematiksel olarak doğrulanacak şekilde sununuz.
5. Tablo 5'te üstel fonksiyonlar ve üstel fonksiyonların terslerine ait cebirsel temsiller verilmiştir. Oluşturduğunuz önermelerden yararlanarak Tablo 5'teki boşlukları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 5

Üstel Fonksiyon	Fonksiyonun Tersi
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = 3^x$	
$h: \mathbb{R} \rightarrow (2, \infty), h(x) = 2 + 5^x$	$h^{-1}: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h^{-1}(x) = \log_5(x - 2)$
$m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, m(x) = 2^{x+1}$	
	$n^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, n^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{5}$
$p: \mathbb{R} \rightarrow (-1, \infty), p(x) = 3 \cdot 2^x - 1$	
	$t^{-1}: (3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, t^{-1}(x) = \log_4(2x - 6)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = e^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun tersi $f^{-1}(x) = \log_e x = \ln x (x > 0)$ doğal logaritmik referans fonksiyon olarak adlandırılır.

6. Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek soruları cevaplayınız.
- 1. adım:** Matematik yazılımında **Giriş** kısmına $f(x) = x$ yazınız ve doğrusal referans fonksiyonun grafiğini çiziniz.
 - 2. adım:** Tablo 5 'te cebirsel temsilleri verilen fonksiyonları **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.
 - 3. adım:** Verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümesini dikkate alarak bu fonksiyonların terslerinin cebirsel temsili tablodaki uygun alanlara yazınız.
 - 4. adım:** Ters fonksiyonunun cebirsel temsili matematik yazılımının **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.
 - 5. adım:** Tüm grafikleri örnekteki gibi tabloda uygun alanlara çiziniz.





- a) Üstel referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği ile bu fonksiyonların tersinin grafiği arasındaki ilişkiyi belirtiniz. Bunun için tablonun altındaki alanı kullanınız.

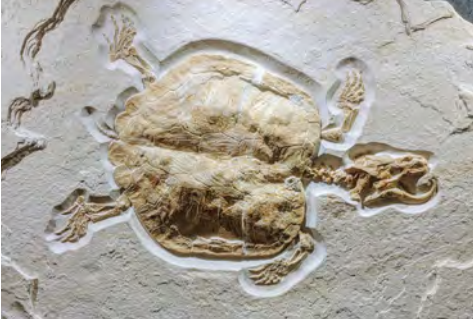
Tablo 5

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$g: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$ $g(x) = e^x + 1$	$g^{-1}: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $g^{-1}(x) = \ln(x - 1)$	
$h: [0, 3] \rightarrow [3, 129]$ $h(x) = 2 \cdot 4^x + 1$	$h^{-1}: [3, 129] \rightarrow [0, 3]$ $h^{-1}(x) =$	
$k: [-5, -1] \rightarrow [6, 166]$ $k(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 4$	$k^{-1}: [6, 166] \rightarrow [-5, -1]$ $k^{-1}(x) =$	

- b) a maddesindeki cebirsel ve grafik temsillerini inceleyerek üstel referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların artanlığı ve azalanlığı ile bu fonksiyonların ters fonksiyonlarının artanlığı ve azalanlığı arasındaki ilişkiye dair çıkarımlarda bulununuz.



7. Aşağıdaki soruyu cevaplayarak elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını değerlendiriniz.



Fosillerin yaşlarını bulmak için Karbon-14 testi yapılır. Bir canlının kemik fosilindeki Karbon-14 miktarının canlı dokulardaki Karbon-14 miktarına oranı ölçülerek canlının yaklaşık kaç yıl önce öldüğü tahmin edilmektedir. t yaşındaki fosilin sahip olduğu Karbon-14 miktarını $A(t)$ bulmak için canlı dokulardaki Karbon-14 miktarı A_0 kullanılır. Bu durum $A(t) = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$ şeklinde modellenir. Arkeologların bulduğu görseldeki kaplumbağa

fosilindeki Karbon-14 miktarının canlı dokulardaki Karbon-14 miktarına oranı $\frac{1}{3}$ olarak tespit edilmiştir.

Buna göre kaplumbağa fosilinin yaklaşık yaşını hesaplayınız. ($\log_2 3 \approx 1,58$)

8. Örnek

Aşağıdaki uygun tanım ve değer kümesine sahip üstel ve logaritmik fonksiyonların ters fonksiyonlarıyla oluşturulan önermelerden yararlanarak fonksiyonların terslerinin cebirsel temsillerini bulunuz.

1. $f(x) = 2^x$
2. $g(x) = \log_3 x$
3. $h(x) = 2 \cdot 5^{x+1} - 3$

Çözüm

1. $f(x) = 2^x \Leftrightarrow \log_2 f(x) = x$ dönüşümü yapılarak $f^{-1}(x) = \log_2 x$ elde edilir.

$a, b \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 1$ olmak üzere
 $a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b$

2. $g(x) = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^{g(x)}$ dönüşümü yapılarak $g^{-1}(x) = 3^x$ elde edilir.

3. $h(x) = 2 \cdot 5^{x+1} - 3 \Leftrightarrow \frac{h(x) + 3}{2} = 5^{x+1} \Leftrightarrow \log_5 \left(\frac{h(x) + 3}{2} \right) = x + 1 \Leftrightarrow \log_5 \left(\frac{h(x) + 3}{2} \right) - 1 = x$
dönüşümü yapılarak $h^{-1}(x) = \log_5 \left(\frac{x+3}{2} \right) - 1$ elde edilir.

$a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun tersi olan $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x$ fonksiyonuna **logaritmik referans fonksiyon** denir. Burada a sayısına logaritmik fonksiyonun **tabanı** denir.

9. Örnek

İnsan kulağı belirli bir frekans aralığındaki sesleri duyabilmektedir. İnsan kulağının zarar görmeden duyabileceği en büyük ses şiddeti 1 watt/m^2 'dir. Ses düzeyini ölçmek için desibel (dB) ölçeği kullanılır. Kaynağın ses şiddeti I olmak üzere ses düzeyini (L) ses şiddetine bağlı olarak modelleyen fonksiyon $L = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ olmaktadır.

Bir kapalı spor salonunda gerçekleştirilen basketbol karşılaşmasında ses düzeyinin 70 dB olarak ölçülmesi durumunda ses şiddetinin kaç watt/m^2 olacağını bulunuz.

Çözüm

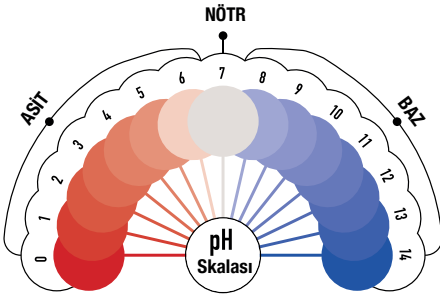
Basketbol müsabakasındaki 70 dB olan ses düzeyi, verilen modellemede kullanılarak

$L = 70 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ denkleminde cebirsel işlemler yapılır. Buradan ses şiddeti I ya ulaşılır.

$70 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ ise $7 = \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ bulunur. Buradan ifade üstel biçimde yazılırsa $10^7 = \frac{I}{10^{-12}}$

ve bu eşitlikten $I = 10^{-5} \text{ watt/m}^2$ elde edilir.

Sıra Sizde 5



Maddelerin asitlik ve bazlık derecelerini kıyaslamak için kullanılan kavrama pH denir. pH değeri 0 ile 7 arasında olan maddeler asit, 7 ile 14 arasında olan maddeler bazdır. pH değeri 7'ye eşit olan maddeler nötrdür. $[H^+]$ değeri, 1 litre çözeltideki artı yüklü hidrojen iyonlarının mol sayısı olmak üzere pH değeri ve $[H^+]$ değeri arasındaki bağıntı $pH = -\log_{10}[H^+]$ eşitliği ile ifade edilir.

Buna göre $[H^+]$ değeri 10^{-6} mol/L olan bir maddenin pH değerini bularak asit ya da baz olma durumunu belirtiniz.

10. Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 2^{4x-1}$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyonunun tersi olan f^{-1} logaritmik fonksiyonunun cebirsel temsilini bularak fonksiyonları artanlık-azalanlık yönünden inceleyiniz.

Çözüm

f üstel fonksiyon, $y = f(x) = 2^{4x-1} \Rightarrow \log_2 y = 4x - 1 \Rightarrow 1 + \log_2 y = 4x \Rightarrow x = \frac{1 + \log_2 y}{4}$ olur. Buradan f

fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{1 + \log_2 x}{4}$ olarak bulunur. f üstel fonksiyonunun tabanı $2 > 1$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için f artan fonksiyondur. f fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan f^{-1} logaritmik fonksiyonunun grafiği de $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için artandır.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Sıra Sizde 6

1. Genlik, bir dalganın en yüksek (ya da en düşük) noktası ile sıfır noktası arasındaki mesafedir. Genlik, dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına bağlıdır. Dalganın enerjisi artarken genlik de artar. Genlik arttıkça da depremin büyüklüğü artar. Depremin büyüklüğü deprem merkez üssünden belli uzaklıktaki sismograf tarafından kaydedilen dalganın maksimum genliğinden yararlanılarak hesaplanır.

R: Richter (Rihta) ölçeğine göre depremin büyüklüğü

d: maksimum genlik (mikron)

olmak üzere R ile d arasında $R = \log_{10} d$ eşitliği bulunmaktadır.

Buna göre maksimum genliği 10^5 mm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü bulunuz. ($1 \text{ mm} = 10^3$ mikron)

2. İlaçlar uygun şekilde kullanıldığında hayat kurtarıcı olabilirken yanlış kullanıldıklarında hastalar için ciddi zararlar doğurabilmektedir. Bakteriyel enfeksiyonların tedavisinde kullanılan antibiyotikler mutlaka doktor gözetiminde alınmalıdır. Antibiyotiklerin doğru süre ve dozda kullanılmaması, tedavi başarısını azaltarak çeşitli olumsuz sonuçlara yol açabilmektedir. Bu bağlamda bir hastanın kullandığı antibiyotiğin vücutta kalan miktarının zamana (sa.) bağlı olarak azaldığı tespit edilmiştir. Bu azalış M_0 , başlangıçtaki alınan antibiyotik miktarı (mg) olmak üzere $M(t) = M_0 \cdot (0,6)^t$ fonksiyonu ile modellenmiştir.

1000 mg'lık antibiyotik tedavisine başlayan bir hasta için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a) Hastanın vücudunda kalan antibiyotik miktarına bağlı geçen zamanı veren fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.
- b) Hastanın vücudunda 216 mg antibiyotik kalması için kaç saat geçmesi gerektiğini bulunuz.

Araştırma Ödevi

Aşağıdaki adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini öğretmeninizin belirlediği sürede eksiksiz şekilde tamamlayınız.

- Logaritmik fonksiyonların derste ele alınmayan farklı gerçek yaşam bağlamında kullanımına ilişkin örnek problem durumlarını araştırınız.
- Belirlediğiniz gerçek yaşam durumuna uygun bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren bir tablo oluşturunuz.
- Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturunuz ve grafiğini çiziniz.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanız analitik dereceli puanlama anahtarı kullanılarak öğretmeniniz tarafından değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

**Matematik Tarihinden Notlar****John Napier (1550-1617)**

Görsel 4.1: John Napier
(Temsili)

Logaritmayı bulan John Napier, (Can Nepiyır) İskoçyalı bir matematikçidir (Görsel 4.1). Sayısal hesaplamaları kolaylaştıracak bir yol ararken önce Napier'in kemikleri olarak bilinen, üzerinde rakamlar yazılı küçük değnekler yardımıyla yapılan bir çarpma-bölme metodu bulmuştur.

- 1614'te yazdığı *Logaritma Kurallarının Tanımı* adlı eserinde aritmetik dizi ile geometrik diziyi karşılaştırarak matematiğe logaritma kavramını kazandırmıştır.
- 1, 2, 3, ... biçimindeki aritmetik dizi ile buna karşılık gelen 10, 100, 1000, ... biçimindeki geometrik dizi arasındaki ilişkiyi fark etmiştir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Gelenbevî İsmail Efendi (1730-1791)

Görsel 4.2: Gelenbevî İsmail
Efendi (Temsili)

Matematik ve mantık alanlarındaki çalışmalarıyla bilinen Osmanlı âlimi İsmail Gelenbevî, 1730 yılında Manisa'nın Kırkağaç ilçesine bağlı Gelenbe kasabasında doğmuştur (Görsel 4.2).

- Gelenbevî, logaritma cetvellerinin nasıl kullanılacağını anlattığı *Logaritma Şerhi* adıyla da bilinen *Şerh-i Cedavil-i Ensab* adlı eseri ile matematikçilerin yolunu aydınlatmıştır.
- Matematik, astronomi, mantık, felsefe, kelam ve tasavvuf ile ilgili 35'in üzerinde eser vermiştir.

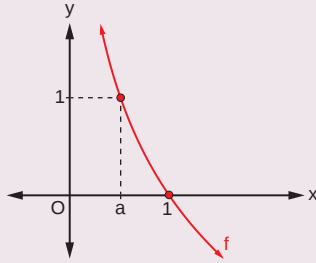
Gelenbevî, III. Selim döneminde humbaracıların (topçuların) başarısız atışlar yapmasının üzerine padişahın emri ile toplardaki açılış riyaizi hesaplarla düzenlemiş ve atışların daha isabetli yapılmasını sağlamıştır.

Kontrol Noktası

- $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$) şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyonunun tabanındaki a sayısı $0 < a < 1$ olduğunda f azalan fonksiyon, $a > 1$ olduğunda f artan fonksiyon olur.

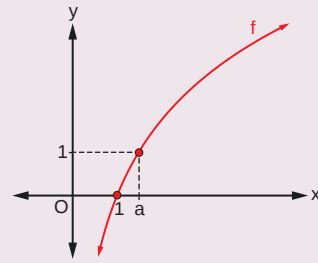
$$0 < a < 1$$

x	0	a	1
$\log_a x$		1	0



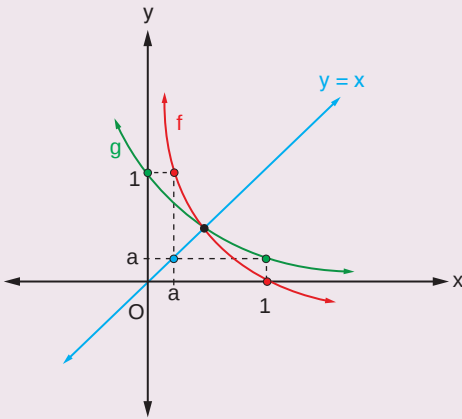
$$a > 1$$

x	0	1	a
$\log_a x$		0	1

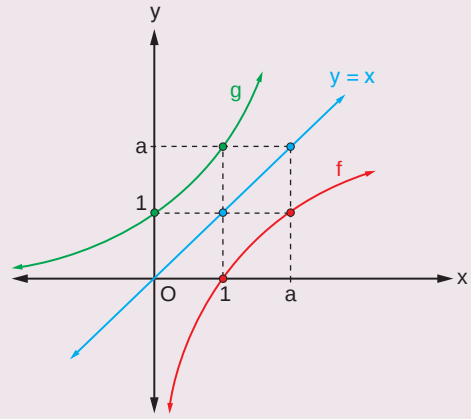


- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = a^x$ ve $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$) şeklinde tanımlı g ve f fonksiyonları $y = x$ doğrusuna göre simetriklerdir.

$$0 < a < 1$$



$$a > 1$$



Ek soruların yer aldığı 2. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Üstel Fonksiyonların Ters Olan Fonksiyonlar)



Alıştırmalar

1. Pozitif gerçekte sayılarda $f(x) = \ln x$ ve $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

Buna göre

- I. f ve g fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik.
- II. f fonksiyonu artan fonksiyondur.
- III. $g(5) > g(8)$ dir.
- IV. f fonksiyonu doğal logaritmik referans fonksiyondur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

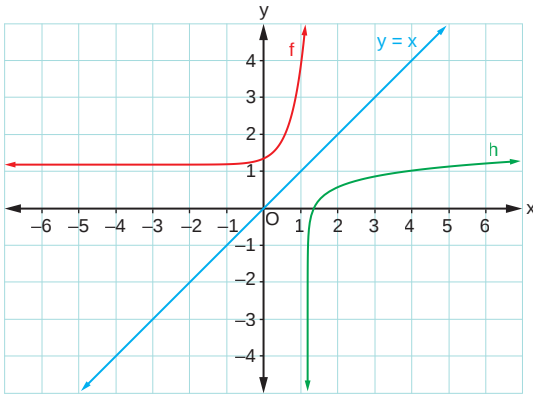
2. 4 milyon nüfuslu bir şehrin yıllık nüfus artış hızı %3'tür.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a) Nüfusu veren fonksiyonun cebirsel temsilini zamana (yıl) bağlı şekilde modelleyerek bulunuz.

- b) n , şehrin nüfus miktarı olmak üzere şehir nüfusunun n milyon olması için gereken zamanı ifade eden g fonksiyonunu bulunuz.

3.



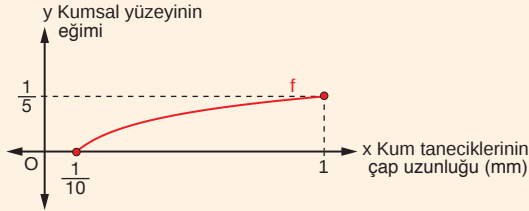
Yanda dik koordinat sisteminde gerçekte sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{2x} + 1$ üstel fonksiyonun grafiği, $y = x$ doğrusu ve pozitif gerçekte sayılarda tanımlı $h(x) = a \cdot \log_3(bx + c)$ logaritmik fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f ve h fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik olmaktadır.

Buna göre $a \cdot b \cdot c$ değerini bulunuz.

4.3. LOGARİTMİK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

Oşinografi; deniz ve okyanusların fiziksel, kimyasal, biyolojik ve jeolojik özelliklerini inceleyen disiplinler arası bir bilim dalıdır.



Grafik 4.3: f fonksiyonunun grafiği

Yapılan bir araştırmaya göre kumsal yüzeyinin eğimini kumsaldaki kum taneciklerinin ortalama çap uzunluğuna bağlı olarak modelleyen f fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1 + \log_{10} x}{5} \text{ olmaktadır. Bu modele ait}$$

$\left[\frac{1}{10}, 1\right]$ nda tanımlı f fonksiyonunu Grafik 4.3'te verilmiştir.

Buna göre

1. Kumsalın farklı bölgelerindeki kum taneciklerine ait çap uzunluklarının aynı olup olmayacağına dair fikirlerinizi yazınız.
2. Kum taneciklerinin çap uzunlukları arttıkça kumsalın eğimi nasıl değişir? Fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

5. Uygulama



Logaritmik Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Bir teknoloji şirketi, yeni bir dosya sıkıştırma algoritması geliştirmiştir. Dosya boyutu x MB (megabayt) ($x > 1$, $x \in \mathbb{N}$) olmak üzere sıkıştırılmış dosya boyutu $f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyonla modellenmektedir.
- a) Tablo 1'de verilen dosya boyutları için $y = f(x)$ değerlerini hesaplayınız. Elde ettiğiniz değerleri kullanarak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz. (n , satır numarası)

Tablo 1

Dosya Boyutu x MB	Sıkıştırılmış Dosya Boyutu $y = \log_2 x$ (MB)	$A_n(x, y)$
2		
3		
4		
5		
8		
16	$\log_2 16 = 4$	$A_6(16, 4)$
32		



- b) Tablodaki bilgilerden yararlanarak dosya boyutuna bağlı olarak sıkıştırılmış dosya boyutunu veren f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

2. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. adım: Cebir menüsünü açınız, **Giriş** bölümüne $f(x) = \log_2 x$ yazınız.

2. adım: Aynı işlemi $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonun grafiğini çizmek için kullanınız.

Matematik yazılımı yardımıyla elde edilen f ve g logaritmik referans fonksiyonlarına ait grafikleri inceleyerek logaritmik referans fonksiyonların değerlerinin rasyonel değerler olup olmadığına dair sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak çıkarımlarda bulununuz.

3. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \log_2 x$ ve $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının nitel özelliklerini bularak Tablo 2'yi uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 2

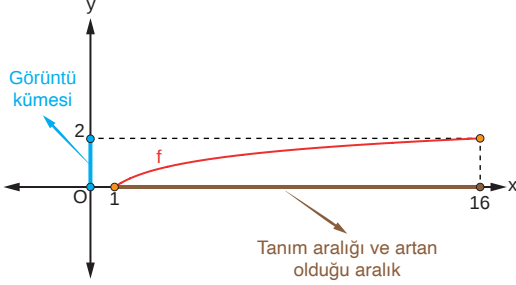
Nitel Özellikler		$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \log_2 x$	$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
Bire Bir Olma Durumu			
Örten Olma Durumu			
Maksimum Noktası ve Değeri			
Minimum Noktası ve Değeri			
Teklik-Çiftlik			
Artanlık-Azalanlık			
Sıfırı			
İşareti	(+)		
	(-)		

11. Örnek

$f: [1, 16] \rightarrow [0, 2]$, $f(x) = \log_4 x$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Verilen tanım ve değer aralığı dikkate alınarak çizilmiş $f(x) = \log_4 x$ şeklinde tanımlı f logaritmik referans fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. f fonksiyonun tanım kümesi $[1, 16]$ görüntü kümesi $[0, 2]$ dir.



Grafik incelendiğinde tanım aralığındaki her x değerine karşılık gelen f değerleri de farklı olduğundan f bire bir fonksiyondur. Değer aralığındaki her f değeri tanım aralığındaki bir x değerine karşılık geldiğinden f fonksiyonu örtendir.

f fonksiyonunun sıfırı $f(x) = \log_4 x = 0$ için $x = 1$ olur. Grafik incelendiğinde f fonksiyonunun $(1, 16]$ nda daima pozitif değerler aldığı görülür.

$\forall x_1, x_2 \in [1, 16]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $[1, 16]$ nda artandır. f fonksiyonunun verilen aralıkta maksimum değeri 2, maksimum değeri veren nokta $x = 16$ 'dır. Minimum değeri 0, minimum değeri veren nokta $x = 1$ 'dir. f logaritmik fonksiyonu tek ya da çift fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 7

Aşağıda logaritmik referans fonksiyonlara ait bazı nitel özellikler, cebirsel ve grafik temsili örnekleri verilmiştir.

	Nitel Özellikler (N)	Cebirsel Temsiller (C)	Grafik Temsilleri (G)
N_1	- Artan fonksiyondur. - Bire bir ve örten fonksiyondur. - Fonksiyon işaretinin (+) olduğu aralık $(1, \infty)$ dir.	C_1 $a(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ $b(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ $c(x) = \log_{\frac{5}{6}} x$	G_1
N_2	- Azalan fonksiyondur. - Bire bir ve örten fonksiyondur. - Fonksiyon işaretinin (-) olduğu aralık $(1, \infty)$ dir.	C_2 $d(x) = \log_7 x$ $e(x) = \log_3 x$ $h(x) = \ln x$	G_2

Logaritmik referans fonksiyonlara ait nitel özellikleri kullanarak bu fonksiyonların grafik ve cebirsel temsillerini doğru biçimde eşleştiriniz.

Tabanı 10 olan logaritmik referans fonksiyona **onluk (bayağı) logaritmik referans fonksiyon** denir. Onluk logaritmik referans fonksiyon $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{10} x$ veya $f(x) = \log x$ şeklinde gösterilir.

6. Uygulama



Logaritmik Referans Fonksiyonun İşlem Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Logaritmik referans fonksiyonların yer aldığı Tablo 1 ve Tablo 2'deki boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_3 x$	$h(x) = \log_5 x$
a ve b değerleri	$a = 2$ ve $b = 4$	$a = 1$ ve $b = 9$	$a = 25$ ve $b = 125$
f(a)	$f(2) = \log_2 2 = 1$		
f(b)			
f(a · b)			
f(a) + f(b)	$\log_2 2 + \log_2 4 = 3$		
Elde Edilen Eşitlik	$\log_2 2 + \log_2 4 = \log_2 (2 \cdot 4)$		

Tablo 2

	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_6 x$	$h(x) = \log x$
a ve b değerleri	$a = 4$ ve $b = 8$	$a = 216$ ve $b = 36$	$a = 10\,000$ ve $b = 100$
f(a)	$f(4) = \log_2 4 = 2$		
f(b)			
$\frac{f(b)}{f(a)}$			
$\log_a b$	$\log_4 8 = \frac{3}{2}$		
Elde Edilen Eşitlik	$\frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \log_4 8$		

2. $f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$) şeklinde verilen logaritmik referans fonksiyonların yer aldığı Tablo 3'teki boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

	b değerleri	f(b)	$a^{f(b)}$	Elde Edilen Eşitlik
$a = 2$	$b = 16$	$f(16) = \log_2 16 = 4$	$2^{\log_2 16} = 2^4 = 16$	$2^{\log_2 16} = 16$
$f(x) = \log_2 x$				
$a = 7$	$b = 49$			
$a = 10$	$b = 1000$			





3. Tablolardan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak logaritmanın işlem özellikleri ile ilgili varsayımlarda bulununuz.
4. Elde ettiğiniz varsayımlardan hareketle logaritmanın işlem özellikleri ile ilgili genellemeler yapınız.
5. Matematik yazılımlarından yararlanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz ve soruyu cevaplayınız.
 1. adım: **Araçlar** menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a ve b sürgülerini tanımlayarak aralığı a sürgüsü için 2 ile 10; b sürgüsü için -5 ile 5 olarak seçiniz.
 2. adım: **Giriş** kısmına $f(x) = \log_a(x^b)$ yazarak grafiğini çiziniz.
 3. adım: **Giriş** kısmına $g(x) = b \cdot \log_a(x)$ yazarak grafiğini çiziniz.Oluşan f ve g fonksiyonlarının grafiklerindeki noktaları $x > 0$ için karşılaştırarak değişimleri gözlemleyiniz. Gözlemlerinizi kullanarak genellemelerinizin varsayımlarınızı karşılayıp karşılamadığını kontrol ediniz.
6. Genellemelerinizden hareketle logaritmanın işlem özellikleri ile ilgili matematiksel olarak doğrulanabilecek önermeler elde ediniz.



7. Elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını aşağıdaki problemi çözerek değerlendiriniz.

R: Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğü

d: maksimum genlik (mikron)

R ile d arasında $R = \log d$ eşitliği vardır. Farklı zamanlarda gerçekleşen iki depremden birincisi için maksimum genlik $d_1 = 32 \cdot 10^{10}$ mikron, ikincisi için maksimum genlik $d_2 = 4 \cdot 10^4$ mikrondur.

Buna göre ilk depremin ikinci depremin kaç katı büyüklüğünde olduğunu hesaplayınız.

8. Elde ettiğiniz önermeleri grafiksel olarak doğrulamak veya cebirsel olarak ispatlamak için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) " $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$) şeklinde bir logaritmik referans fonksiyon tanımlanıyor. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ için $f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ eşitliği sağlanır." ifadesinin doğruluğunu cebirsel olarak ispatlayınız.

b) " $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ ve $g(x) = \log_{2^a} x^b$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) şeklinde logaritmik fonksiyonlar tanımlanıyor. Aşağıdaki adımları matematik yazılımında gerçekleştiriniz ve " $g(x) = \frac{b}{a} \cdot f(x)$ eşitliği tüm pozitif gerçek sayılarda sağlanır." ifadesini oluşturduğunuz grafikler yardımıyla doğrulayınız.

1. adım: Matematik yazılımını açarak **Sürgü** kısmını seçiniz. Buradan a ve b sürgülerini oluşturunuz.

2. adım: **Giriş** bölümüne $f(x) = \log_2 x$ yazınız.

3. adım: **Giriş** bölümüne $g(x) = \frac{b}{a} \cdot f(x)$ yazınız.

4. adım: **Giriş** bölümüne $h(x) = \log_{2^a} x^b$ yazınız.

5. adım: Oluşan fonksiyon grafiklerinde a ve b sürgülerini hareket ettirerek grafiklerdeki değişimleri gözlemleyiniz.

Logaritmanın işlem özelliklerinin ispatı ile ilgili Çalışma Kağıdı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



9. İşe koştduğunuz grafiksel doğrulama ve cebirsel ispat yöntemlerinin farklı durumlardaki kullanışlılığını ve sınırlılığını değerlendiriniz.

12. Örnek

" $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ olur." önermesini cebirsel temsillerden yararlanarak ispatlayınız.

Çözüm

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere önermenin ispatı aşağıda verilmiştir.

- I. $\log_a x = p$ ve $\log_a y = q$ olarak seçilirse logaritmanın tersi alınarak $x = a^p$ ve $y = a^q$ eşitlikleri elde edilir.
- II. $x = a^p$ ve $y = a^q$ eşitlikleri taraf tarafa çarpılır. Buradan $x \cdot y = a^p \cdot a^q$ elde edilir.
- III. $x \cdot y = a^p \cdot a^q$ eşitliği, üslü ifadelerdeki işlemler uygulanarak $x \cdot y = a^{p+q}$ elde edilir.
- IV. $x \cdot y = a^{p+q}$ eşitliğinde üstel fonksiyonun tersi alınarak $\log_a(x \cdot y) = p + q$ bulunur.
- V. $\log_a(x \cdot y) = p + q$ eşitliğinde $\log_a x = p$ ve $\log_a y = q$ yerine yazılırsa $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ bulunur.

13. Örnek

Aşağıdaki soruları logaritmanın işlem özelliklerine yönelik oluşturduğunuz önermelerden yararlanarak cevaplayınız.

1. $\log_8 2 + \log_5 5$ işleminin sonucunu bulunuz.
2. $\log 2 \approx 0,301$ değeri veriliyor. Buna göre $\log 5$ 'in yaklaşık değerini hesaplayınız.

Çözüm

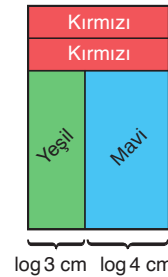
1. $\log_8 2 = \log_8 \sqrt[3]{8} = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_8 8 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ bulunur.
 $\log_5 5 = 1$ olur. Buradan $\log_8 2 + \log_5 5 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ elde edilir.
2. $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301 = 0,699$ elde edilir.

Sıra Sizde 8

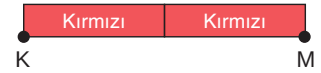
Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Büyük bir kutunun içine yeşil, mavi ve kırmızı dikdörtgen şeklindeki kutucuklar Şekil 1'de gösterildiği gibi dizilmiştir. Kırmızı iki kutucuğun yan yana getirilmesiyle Şekil 2 elde edilmiştir.

Buna göre Şekil 2'de verilen $|KM|$ kaç cm'dir? ($\log 3 \approx 0,477$ ve $\log 2 \approx 0,301$)



Şekil 1



Şekil 2

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\log_{\sqrt{2}} 1 - \ln 1 + 4 \cdot \log 10$

b) $5 \cdot \ln e + 2 \cdot \log 1 - 3 \cdot \log_7 7$

c) $\log_2 16 + \ln e^2 - \log 1000$

ç) $\log_{\sqrt{5}} 5 - \log 0,1 - \log_2 0,25$

3. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $\log_5 2 = m$ ve $\log_3 5 = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\log_5 12$ ifadesinin m ve n türünden eşitini bulunuz.

b) $\log_6 36! = a$ olduğuna göre $\log_6 35!$ ifadesinin a türünden eşitini bulunuz.

c) $\log_2 5 = b$ olduğuna göre $\log_2 \left(\frac{25}{8} \right)$ ifadesinin b türünden eşitini bulunuz.

14. Örnek

Logaritmanın temel işlem özelliklerini kullanarak aşağıdaki problemleri çözünüz.

- $8^{2+\log_8 2} + 3^{\log_9 25}$ işleminin sonucunu bulunuz.
- $5^{\log_7 x} + x^{\log_7 5} = 50$ eşitliği veriliyor. Buna göre denklemi sağlayan x değerini bulunuz.

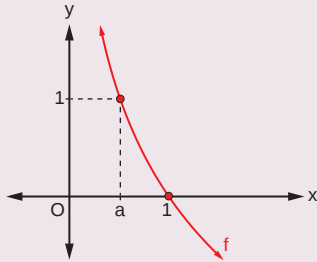
Çözüm

- $8^{2+\log_8 2} = 8^2 \cdot 8^{\log_8 2} = 64 \cdot 2 = 128$ elde edilir. $3^{\log_9 25} = 3^{\log_{3^2} 5^2} = 3^{\frac{2}{2} \cdot \log_3 5} = 3^{\log_3 5} = 5$ elde edilir. Buna göre $8^{2+\log_8 2} + 3^{\log_9 25} = 128 + 5 = 133$ bulunur.
- $x = 7^{\log_7 x}$ olduğundan toplama işleminin ikinci teriminde yer alan x yerine $7^{\log_7 x}$ yazılır. $x^{\log_7 5} = (7^{\log_7 x})^{\log_7 5} = 7^{\log_7 x \cdot \log_7 5} = (7^{\log_7 5})^{\log_7 x} = 5^{\log_7 x}$ olur. Buna göre $5^{\log_7 x} + x^{\log_7 5} = 2 \cdot 5^{\log_7 x}$ elde edilir. $2 \cdot 5^{\log_7 x} = 50$ eşitliğinden $5^{\log_7 x} = 25 = 5^2$ olur. Buradan $\log_7 x = 2$ olduğu için $x = 49$ olarak bulunur.

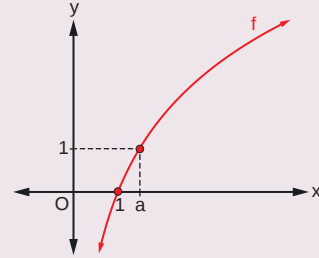
Kontrol Noktası

Aşağıda $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$) şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyonun grafikleri verilmiştir.

$$0 < a < 1$$



$$a > 1$$



- Logaritmik referans fonksiyonun
 - » Tanım kümesi $\mathbb{R}^+$, görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir.
 - » $a > 1$ için f artan, $0 < a < 1$ için f azalandır.
 - » Maksimum ve minimum noktaları yoktur.
 - » Sıfırı 1'dir.
 - » İşareti $a > 1$ için $(0, 1)$ nda negatif, $(1, \infty)$ nda pozitif; $0 < a < 1$ için $(0, 1)$ nda pozitif, $(1, \infty)$ nda negatiftir.
- Logaritmik referans fonksiyon bire bir ve örtendir.
- Logaritmik referans fonksiyon tek veya çift fonksiyon değildir.

Logaritma Özellikleri

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall m, n \in \mathbb{R}$ ve $m \neq 0$ olmak üzere logaritma işlem özellikleri aşağıda verilmiştir.

- | | | |
|---|--|--|
| • $\log_a a = 1$ | • $\log_a m^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$ | • $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ |
| • $\log_a 1 = 0$ | • $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ | • $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ |
| • $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ | • $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ | • $a^{\log_a b} = b$ |
| • $\log_a m b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$ | • $\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log_b c}{\log_c a}$ | • $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ |

Logaritmik Referans Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlar

Logaritmik referans fonksiyonlardaki dönüşümler incelenerek bu fonksiyonların grafiklerinin gerilmesi veya sıkıştırılması, simetri ve ötelenme özelliklerindeki değişiklikler analiz edilebilir.

7. Uygulama



$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$) Şeklinde Tanımlı Logaritmik Referans Fonksiyondan Türetilen $g(x) = k \cdot f(mx + r) + s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) Logaritmik Fonksiyonunun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

- Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a, k, m, r ve s sürgülerini tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

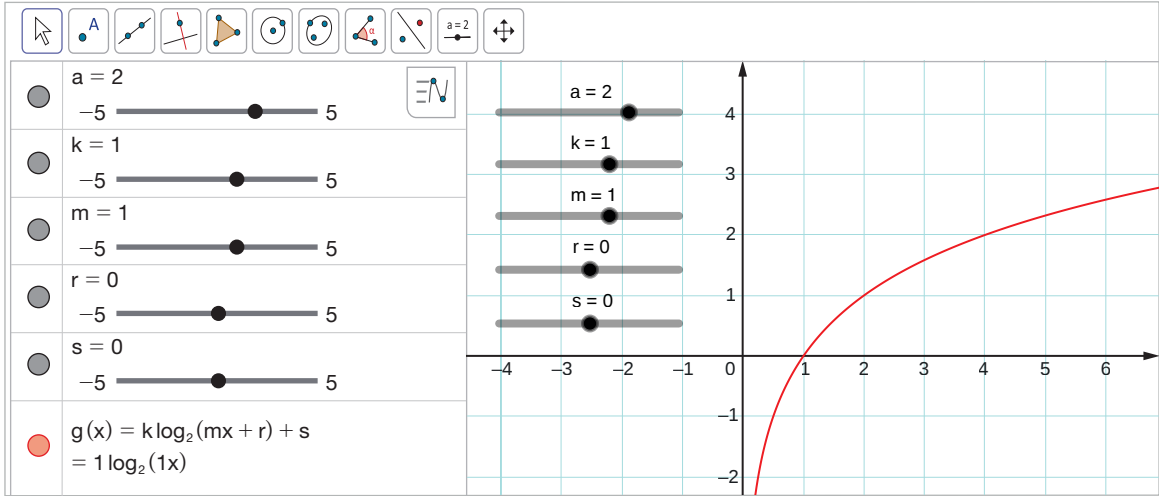
2. adım: a sürgüsünü 2 seçerek cebir menüsünden **Giriş** bölümüne $g(x) = k \cdot \log_2(mx + r) + s$ yazarak giriş yapınız.

3. adım: Sürgüleri $k = 1, m = 1, r = 0$ ve $s = 0$ seçerek $g(x) = \log_2 x$ logaritmik referans fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Konu ile ilgili videoya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



- a) $m = 1, r = 0, s = 0$ ve $k \neq 0$ iken k sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyon İsmi	k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Logaritmik Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \log_2(mx + r) + s$	Logaritmik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Logaritmik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 2$	$h(x) = 2 \log_2 x$	Her bir bağımsız değişkenine karşılık gelen değeri 2 ile çarpma	2 kat yatay gerilme
n	$k = -2$			
t	$k = 4$			
p	$k = \frac{1}{2}$			



- b) $m = 1, r = 0$ ve $k \neq 0$ iken k ve s sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyon İsmi	k ve s Sürgüsünün Değeri	Oluşan Logaritmik Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \log_2(mx + r) + s$	Logaritmik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Logaritmik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1,$ $s = 2$	$h(x) = \log_2 x + 2$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen fonksiyon değerine 2 ekleme	y eksenini boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
n	$k = -1,$ $s = 4$			
t	$k = 3,$ $s = -2$			
p	$k = -2,$ $s = -\frac{1}{2}$			

- c) $m \neq 0, r = 0$ ve $k \neq 0$ iken k, s ve m sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyon İsmi	k, s ve m Sürgüsünün Değeri	Oluşan Logaritmik Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \log_2(mx + r) + s$	Logaritmik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Logaritmik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1,$ $s = 0, m = 4$	$h(x) = \log_2 4x$	Her bir bağımsız değişkeni 4 ile çarpma	4 kat yatay sıkıştırma
n	$k = -2,$ $s = 1, m = 3$			
t	$k = 1,$ $s = 0, m = 2$			
p	$k = -4,$ $s = -\frac{1}{2},$ $m = 1$			





- ç) $m \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k , s , m ve r sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4

Fonksiyon İsmi	k , s , m ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Logaritmik Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \log_2(mx+r) + s$	Logaritmik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Logaritmik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 3, s = 0,$ $m = 1$ ve $r = 2$	$h(x) = 3 \cdot \log_2(x + 2)$	Her bir bağımsız değişkenin 2 fazlasının fonksiyon değerini 3 ile çarpma	x eksenini boyunca negatif yönde 2 birim öteleme ve 3 kat dikey gerilme
n	$k = 2, s = 0,$ $m = 2$ ve $r = 3$			
t	$k = 3,$ $s = -1,$ $m = 2$ ve $r = 1$			
p	$k = -1,$ $s = 1,$ $m = -2$ ve $r = 0$			

2. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlı f logaritmik referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler sonucunda elde edilen logaritmik fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini kullanarak Tablo 5'i örnekteki gibi doldurunuz. Grafik temsili matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

Tablo 5

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsil	Grafik Temsili
y eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme	$h(x) = \log_2 x + 1$	





2 kat dikey sıkıştırma ve x eksenini boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme		
y eksenine göre yansıma ve x eksenini boyunca negatif yönde 3 birim öteleme		

Grafik temsilinden cebirsel temsile dönüşüm ile ilgili Çalışma Kağıdı'na ve Öz Değerlendirme Formu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



3. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlı f logaritmik referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle Tablo 6 ve Tablo 7'de cebirsel temsili verilen logaritmik fonksiyonun nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

Tablo 6

$h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 1 + 2 \cdot \log_2 x$	
Nitel Özellikler	Varsayımlar
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Bire Birliği	Bire bir fonksiyondur.
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırı	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Tekliği-Çiftliği	



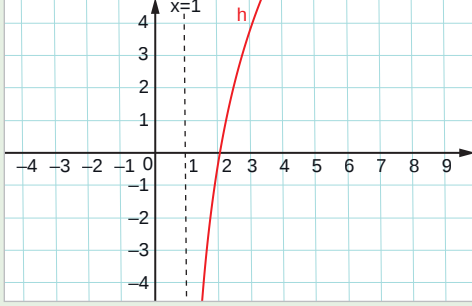


Tablo 7

$g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ ($a > 0$ ve $a \neq 1$) ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$)	
Nitel Özellikler	Varsayımlar
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Bire Birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırı	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Maksimum ve minimum noktası yoktur.
Artanlığı-Azalanlığı	
Tekliği-Çiftliği	

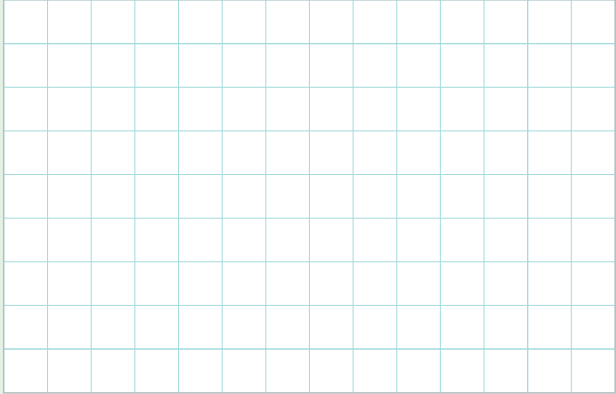
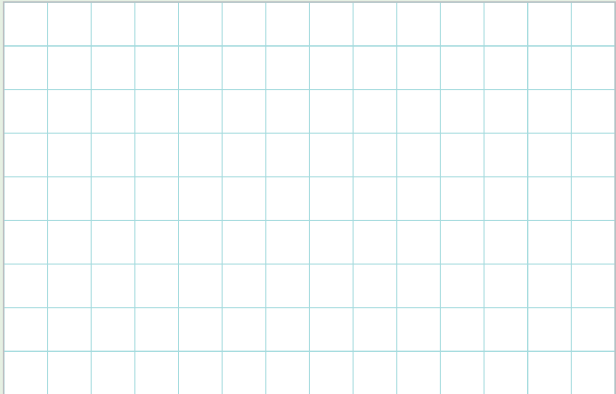
4. Aşağıda $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlı f logaritmik referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.
- a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz, Tablo 8'i istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 8

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Sıfırlar
$h(x) = 4 \cdot \log_2(x - 1)$	Grafik		
	Cebirsel	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun $x = 1$ doğrusunun sağında tanımlı olduğu görülür. Bu nedenle h fonksiyonu $(1, \infty)$ nda tanımlı olmaktadır. f logaritmik referans fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ da tanımlıdır. $h(x) = 4 \cdot f(x - 1) = 4 \cdot \log_2(x - 1)$ olur. h fonksiyonun tanımlı olması için $x - 1 > 0$ olmalıdır. Bu nedenle h fonksiyonunun tanım kümesi $(1, \infty)$ olur.	Grafik incelendiğinde f logaritmik referans fonksiyonunun grafiğinin 4 kat dikey gerilmesiyle ve x eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenmesiyle h fonksiyonunun grafiğinin oluştuğu görülür. Bu ötelenme sonucunda h fonksiyonunun sıfırı $x = 2$ noktası olur. Burada $h(x) = 0$ için $x - 1 = 1$ olmalıdır. Bu nedenle h fonksiyonun sıfırı $x = 2$ olur.





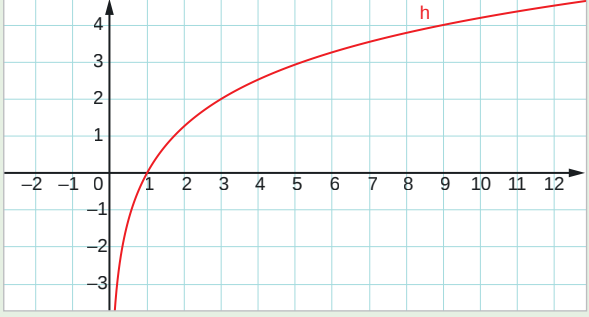
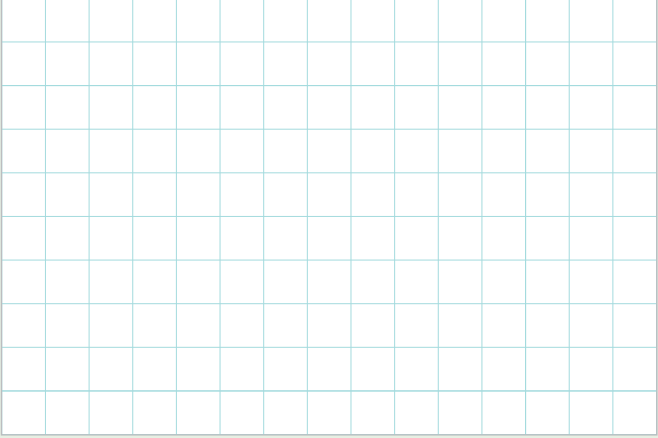
$n(x) = 1 + 2 \cdot \ln 3x$	Grafik		
$t(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x + 8$	Grafik		
	Cebirsel		
	Cebirsel		





- b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz, Tablo 9'u istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 9

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	İşareti	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$h(x) = 2 \log_3 x$	Grafik		
	Cebirsel	Grafik incelendiğinde h fonksiyonu $(0, 1)$ nda negatif, $(1, \infty)$ nda pozitif değerli olmaktadır.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun değerlerinin $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için arttığı görülür. h fonksiyonu artandır.
$n(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$	Grafik		
	Cebirsel	Fonksiyon $x > 0$ için tanımlıdır. $h(x) = 2 \cdot \log_3 x > 0$ olması için $x > 3^0 \Rightarrow x > 1$ olmalıdır. $h(x) = 2 \cdot \log_3 x < 0$ olması için $x < 3^0 \Rightarrow x < 1$ olmalıdır. Fonksiyon $x > 1$ için pozitif, $0 < x < 1$ için negatif değer alır.	





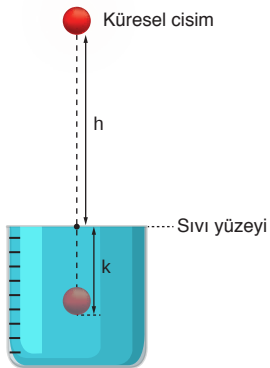
- c) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz, Tablo 10'u istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 10

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Görüntü Kümesi	Bire birlik
$h(x) = \ln x - 2$	Grafik		
		Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tüm değerleri alabildiği görülmektedir. Bu nedenle görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tanım kümesindeki her x değerine karşılık gelen değerin farklı olduğu görülmektedir. h fonksiyonu bire birdir.
	Cebirsel	f logaritmik referans fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir. $h(x) = f(x) - 2 = \ln x - 2$ olduğu için h fonksiyonunun da görüntü kümesi $\mathbb{R}$ olur.	$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ için $h(x_1) = \ln(x_1) - 2$ ve $h(x_2) = \ln(x_2) - 2$ olur. Buna göre $x_1 \neq x_2$ için $\ln(x_1) - 2 \neq \ln(x_2) - 2$ olur. Buradan $h(x_1) \neq h(x_2)$ elde edilir. h fonksiyonu bire birdir.
$n(x) = 4 \cdot \ln x + 1$	Grafik		
	Cebirsel		



5. Yaptığınız çalışmalardan elde ettiğiniz nitel özellikleri kullanarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f logaritmik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ ($a > 0$ ve $a \neq 1$) ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.
6. Oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f logaritmik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ ($a > 0$ ve $a \neq 1$) ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeyi sözel veya cebirsel olarak ifade ediniz.
7. Elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanılışlığını, aşağıdaki problem durumunu inceleyip soruları cevaplayarak değerlendiriniz.



Tamamen sıvı ile dolu 10 birim derinliğinde bir kaba h birim yükseklikten sıvı ile aynı yoğunlukta küresel bir cisim bırakılmaktadır. Cisim, şekildeki gibi sıvı yüzeyinin k birim altına inmektedir. h ye bağlı k fonksiyonu $k(h) = \log_2(h + 1)$ şeklinde modellenmiştir. (cismin hacmi önemsizdir.)

- a) Küresel cismin en fazla 63 birim yükseklikten bırakıldığı bilindiğine göre cismin inebileceği derinliğin kaç birim olduğunu gösteren değer aralığını bulunuz.
- b) Küresel bir cisim, kabın içerisine h_1 yüksekliğinden bırakıldığında 5 birim derinliğe inmektedir. Buna göre h_1 değerinin kaç birim olduğunu bulunuz.



8. Elde ettiğiniz önermeleri grafiksel olarak doğrulamak veya cebirsel olarak ispatlamak için aşağıdaki soruları cevaplayınız.
- a) " $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyona yapılan dönüşümler ile elde edilen $g(x) = \log_2(mx + n)$ ($m \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R}$) şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonun tanım kümesi $(-\frac{n}{m}, \infty)$ dır." önermesini ispatlayınız.

- b) " $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyona yapılan dönüşümler sonucunda elde edilen $g(x) = \log_2(mx + n)$ ($m, n \in \mathbb{R}$ ve $m \neq 0$) şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonun $g^{-1}(x) = \frac{2^x - n}{m}$ şeklinde cebirsel temsili olan üstel fonksiyondur." önermesinin doğruluğunu aşağıdaki adımları matematik yazılımında gerçekleştirerek grafiksel olarak doğrulayınız.

1. **adım:** Matematik yazılımını açarak **Sürgü** kısmını seçiniz. Buradan m ve n sürgülerini oluşturunuz.

2. **adım:** Giriş bölümüne $g(x) = \log_2(mx + n)$ yazınız.

3. **adım:** Giriş bölümüne $y = x$ yazarak grafiğini çiziniz.

4. **adım:** Giriş bölümüne $g^{-1}(x) = \frac{2^x - n}{m}$ yazarak grafiğini çiziniz.

5. **adım:** Oluşan fonksiyon grafiklerinde m ve n sürgülerini hareket ettirerek grafikteki değişimleri gözlemleyiniz.

9. İşe koştüğunuz doğrulama ve ispat yöntemlerinizin farklı durumlardaki kullanılabilirliğini aşağıdaki soruyu çözerek değerlendiriniz.

Bir mühendis, elektronik bir cihazın belirli bir uyarana verdiği tepkiyi incelemektedir. Cihazın tepkisi, uygulanan uyarının miktarına bağlı olarak değişmekte ve bu ilişki logaritmik bir modelle ifade edilmektedir. Söz konusu model $g(x) = \log_2(3x - 6)$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonu ile gösterilmektedir. Burada x, uygulanan uyarının şiddetini (volt), g fonksiyonu ise cihazın kaydettiği tepki seviyesini göstermektedir. Mühendis, cihazın ancak belirli bir uyarı seviyesinden sonra fiziksel olarak tepki verdiğini belirtmektedir.

Buna göre cihazın tepki vereceği uyarı şiddetinin aralığını bulunuz.

15. Örnek

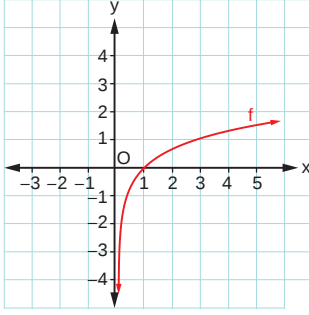
$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 x$ şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyona yapılan dönüşümler sonucunda elde edilen $g(x) = 2 \cdot f(x)$, $h(x) = f(x) + 3$ ve $r(x) = 2 \cdot f(x) + 3$ fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- g, h ve r fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.
- r fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



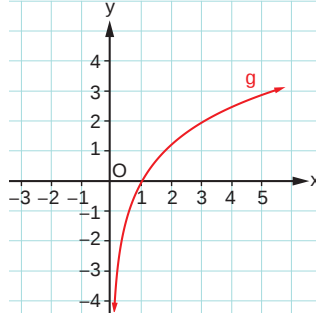
Çözüm

1. $g(x) = 2 \cdot f(x)$ olduğu için $g(x) = 2 \log_3 x$ elde edilir.
 $h(x) = f(x) + 3$ olduğu için $h(x) = \log_3 x + 3$ elde edilir.
 $r(x) = 2 \cdot f(x) + 3$ olduğu için $r(x) = 2 \log_3 x + 3$ elde edilir.
2. r fonksiyonunun grafiği çizilirken f fonksiyonunun görüntü kümesindeki elemanların önce Grafik 2'deki gibi 2 katı alınır sonra elde edilen grafik y eksenini boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenerek Grafik 3'teki r fonksiyonunun grafiği elde edilir.



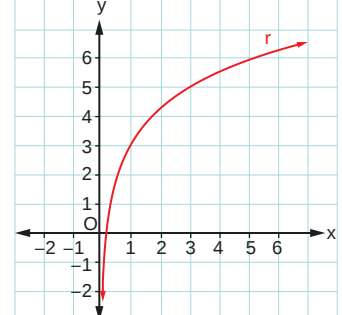
Grafik 1

$$f(x) = \log_3 x$$



Grafik 2

$$g(x) = 2 \log_3 x$$



Grafik 3

$$r(x) = 2 \log_3 x + 3$$

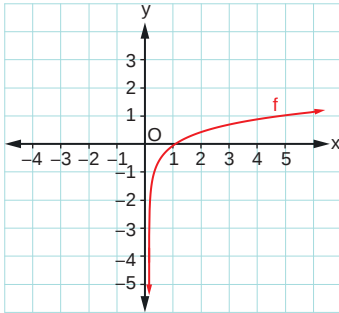
16. Örnek

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5 x$ şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyona yapılan dönüşümler sonucunda elde edilen $g(x) = f(2x)$ ve $h(x) = f(2x - 1)$ fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. g ve h fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.
2. h fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

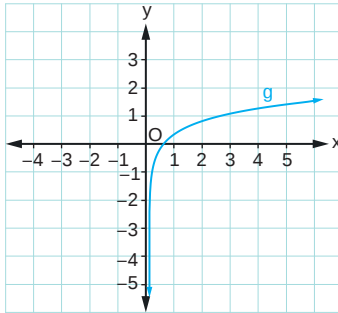
Çözüm

1. $g(x) = f(2x)$ olduğu için $g(x) = \log_5 2x$ elde edilir.
 $h(x) = f(2x - 1)$ olduğu için $h(x) = \log_5 (2x - 1)$ elde edilir.
2. h fonksiyonunun grafiği çizilirken önce f fonksiyonunun grafiği Grafik 2'deki gibi 2 kat yatay sıkıştırılır, sonra elde edilen grafik x eksenini boyunca $\frac{1}{2}$ birim pozitif yönde ötelenerek Grafik 3'teki h fonksiyonunun grafiği elde edilir.



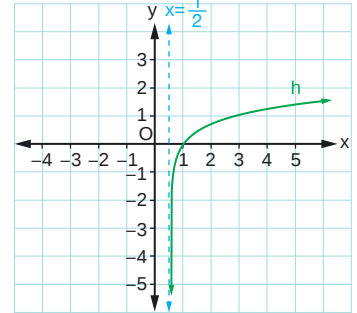
Grafik 1

$$f(x) = \log_5 x$$



Grafik 2

$$g(x) = \log_5 2x$$



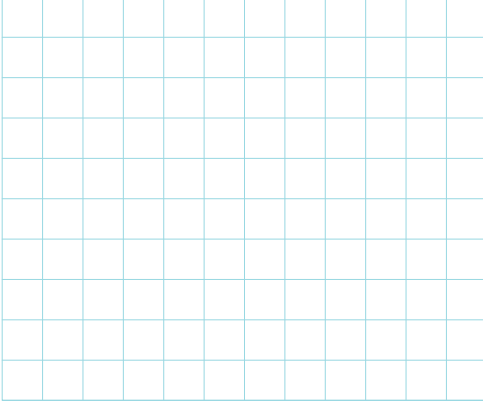
Grafik 3

$$h(x) = \log_5 (2x - 1)$$

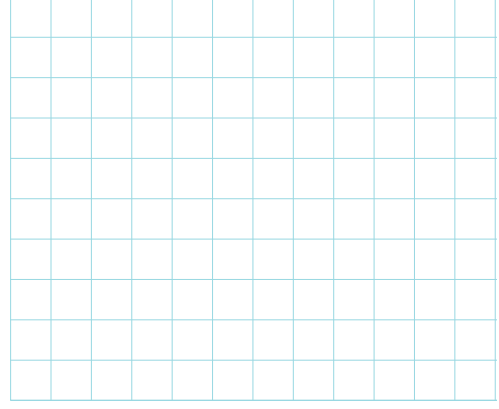
Sıra Sizde 9

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = 3 \cdot \log_2 x + 1$ ve $h(x) = \log_2(3x - 6)$ fonksiyonlarının grafiklerini aşağıda boş bırakılan alanlara çiziniz.

g fonksiyonunun grafiği



h fonksiyonunun grafiği

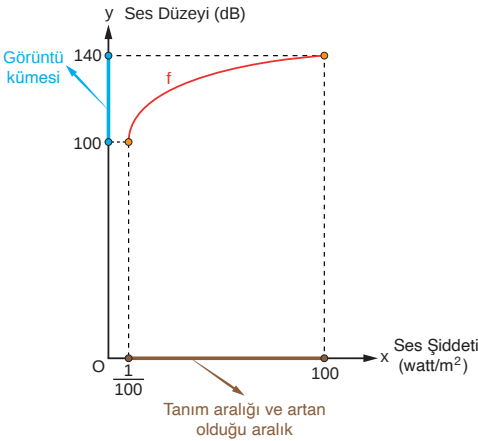


17. Örnek

Bir kaynaktan çıkan ses şiddeti watt/m^2 ile ölçülür. Ses şiddeti kullanılarak ses düzeyi bulunur. Ses düzeyi desibel (dB) ile ölçülür. Bir konser salonundaki hoparlörün ses şiddeti $x \text{ watt/m}^2$ olmak üzere, ses düzeyi $f: \left[\frac{1}{100}, 100\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{10^{-12}}\right)$ şeklinde f fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. Buna göre f logaritmik fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Verilen tanım aralığı dikkate alınarak çizilmiş $f(x) = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{10^{-12}}\right)$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Grafik incelendiğinde tanım kümesinin $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$, görüntü kümesinin $[100, 140]$ olduğu görülür. Tanım aralığındaki her x değerine karşılık gelen f değerleri de farklı olduğundan f bire birdir. Değer aralığındaki her f değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden örten değildir.

$f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri olmadığından f fonksiyonunun sıfırı yoktur. Grafik incelendiğinde f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta daima pozitif değerler aldığı görülür.

$\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{100}, 100\right]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$ nda artandır.

f fonksiyonunun verilen aralıkta maksimum değeri 140, maksimum değeri veren nokta $x = 100$ 'dür. Minimum değeri 100, minimum değeri veren nokta $x = \frac{1}{100}$ 'dür. f logaritmik fonksiyonu tek ya da çift fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 10

Aşağıda logaritmik referans fonksiyonlara yapılan dönüşümler sonucunda elde edilen f ve g fonksiyonları verilmiştir.

$$f(x) = \log_3(4x - 1) \text{ ve } g(x) = \log_5(-x + 6)$$

f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi A, g fonksiyonunun en geniş tanım kümesi B olduğuna göre $A \cap B$ kümesini bulunuz.

Performans Görevi

Adı: Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Beklenen Performans: Üstel ve logaritmik fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili uygulamalar yapma.

Görev: Bu görevde verilen içerikten seçeceğiniz kimya, fizik ve biyoloji alanlarına ilişkin karekodda verilen gerçek yaşam problemlerinden birini seçerek üstel ve logaritmik referans fonksiyonların nitel özellikleriyle ilgili uygulamalar yapmanız istenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Verilen karekodu okutarak içerikte verilen fizik, kimya, ve biyoloji alanlarına ilişkin gerçek yaşam problemlerini inceleyiniz.
- Bu alanlardan birini seçerek seçtiğiniz alanda verilen üstel ve logaritmik fonksiyonlarla ilgili nitel özellik sorularını çözünüz.
- Çalışmanızda soruları cevaplarken işlem hatası yapmamaya, yazım kurallarına, ifadelerinizin açık ve anlaşılır olmasına dikkat ediniz.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Tamamladığınız çalışmayı öğretmeninize teslim ediniz.

Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Performans görevinin içeriğine ve Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Kontrol Noktası

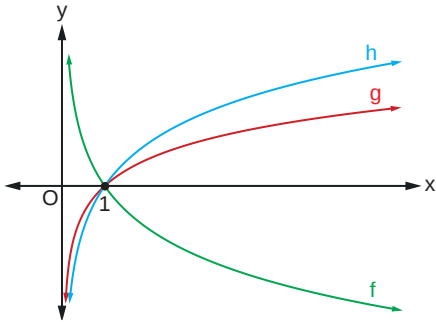
1. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ ve $a \neq 1$) şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ fonksiyonunun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır:
 1. adım: $f(x) = \log_a x$ referans fonksiyonun grafiği x ekseninin negatif yönünde r birim ($r > 0$) ötelenerek $b(x) = \log_a(x + r)$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
 2. adım: $b(x) = \log_a(x + r)$ fonksiyonunun grafiği
 - $|m| > 1$ olduğunda yatay sıkıştırılarak,
 - $|m| < 1$ olduğunda x yatay gerilerek $c(x) = \log_a(mx + r)$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
 3. adım: $c(x) = \log_a(mx + r)$ fonksiyonunun değerini k katına eşleyen $d(x) = k \cdot \log_a(mx + r)$ fonksiyonun grafiği çizilir.
 4. adım: $d(x) = k \cdot \log_a(mx + r)$ fonksiyonu y eksenı boyunca pozitif yönde s birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. k, m, r ve $s \in \mathbb{R}$ ($m \neq 0, k \neq 0$) olmak üzere gerçık sayılarda $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonunun nitel özelliklerine ait aşağıdaki sonuçlara varılır.
 - Tanım kümesi $m > 0$ için $(-\frac{r}{m}, \infty)$, $m < 0$ için $(-\infty, -\frac{r}{m})$ olur.
 - g fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir.
 - g fonksiyonu bire birdir.
 - $a > 1$ ve $m > 0$ ya da $0 < a < 1$ ve $m < 0$ ise g artan fonksiyon olur.
 - $a > 1$ ve $m < 0$ ya da $0 < a < 1$ ve $m > 0$ ise g azalan fonksiyon olur.

Ek soruların yer aldığı 3. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Logaritmik Fonksiyonlar, Nitel Özellikleri ve İşlem Özellikleri)



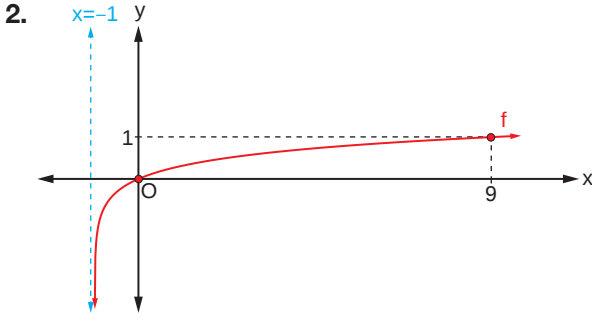
Alıştırmalar

1.



Pozitif gerçık sayılarda tanımlı cebirsel temsilleri $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$ ve $h(x) = \log_c x$ olan logaritmik fonksiyonların grafikleri yanda verilmiştir.

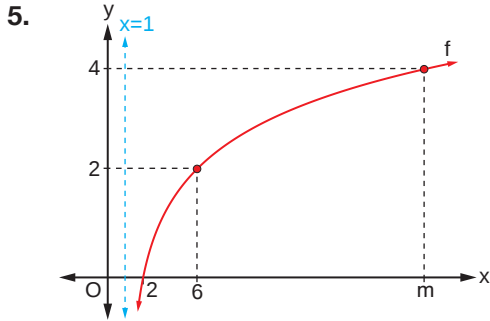
Buna göre a, b ve c sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.



Yanda verilen $f(x) = \log_a(bx + c)$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonun grafiğine göre $a + b - c$ değerini hesaplayınız.

3. $\log_5 2 = m, \log_5 3 = n$ olduğuna göre $\log_5 288$ 'in m ve n cinsinden eşitini bulunuz.

4. $\log_6 9 \cdot \log_9 12 \cdot \log_{12} 15 \cdot \dots \cdot \log_n(n+3) = 2$ ($n = 3k, k \in \mathbb{Z}$) ise n değerini hesaplayınız.

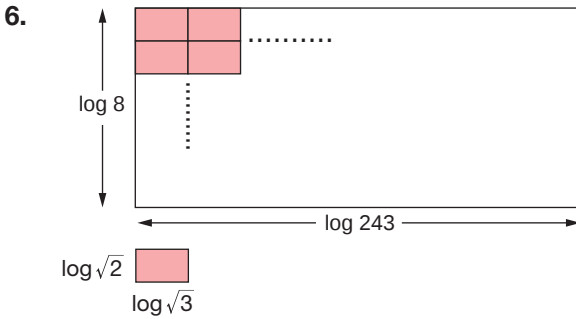


Yanda $f(x) = 2 \cdot \log_5(x - 1)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Buna göre

- I. f fonksiyonunun tanım kümesi $(1, \infty)$ dır.
- II. f , azalan fonksiyondur.
- III. m nin alacağı değer 26'dır.
- IV. $f\left(\frac{6}{5}\right) + f^{-1}(2) = 4$ 'tür.

İfadelerinden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.



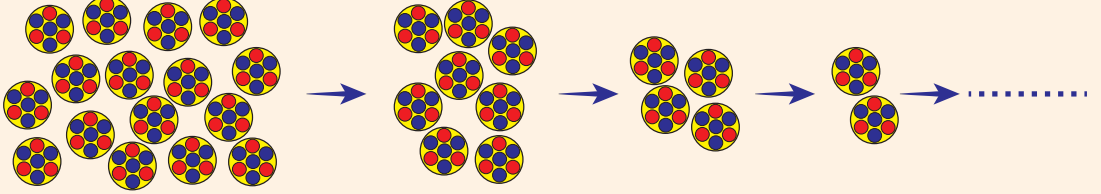
Kenar uzunlukları $\log 8$ metre ve $\log 243$ metre olan dikdörtgen şeklindeki bir karton, kenar uzunlukları $\log \sqrt{2}$ metre ve $\log \sqrt{3}$ metre olan küçük dikdörtgen şeklindeki etiketlerle kaplanacaktır.

Buna göre bu iş için kaç adet etiket kullanılması gerektiğini bulunuz.

4.4. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENLEM VE EŞİTSİZLİKLER İÇEREN PROBLEMLER

Konuya Başlarken

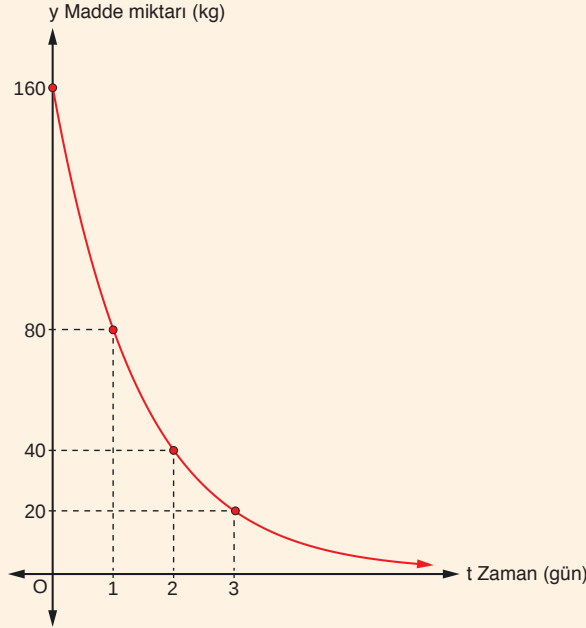
Radyoaktif bir maddenin yarılanma süresi, başlangıçta mevcut olan maddenin yarısının bozunması için gereken süredir. Yarılanma süresi 1 gün olan Şekil 4.1'deki radyoaktif maddenin başlangıçtaki miktarı 160 kg'dır.



Şekil 4.1: Radyoaktif maddenin yarılanma süreci

Bu radyoaktif madde uygun bir laboratuvar ortamında gözleniyor. Radyoaktif maddenin zamana bağlı olarak kalan miktarını veren fonksiyon $A(t) = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ şeklinde modelleniyor.

A üstel fonksiyonu Grafik 4.4'te verilmiştir.



Grafik 4.4: A üstel fonksiyonunun grafiği

Buna göre

1. Grafikten yararlanılarak kalan radyoaktif madde miktarının 60 kg olduğu zamanın nasıl bulunabileceğine ilişkin fikirlerinizi yazınız ve sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.
2. Kalan radyoaktif madde miktarının 15 kg olması için geçmesi gereken zamanın cebirsel temsiller yardımıyla nasıl bulunabileceğine ilişkin fikirlerinizi yazınız ve sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

8. Uygulama



Üstel ve Logaritmik Referans Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlarla Oluşturulan Denklem ve Eşitsizlikler

Aşağıda üstel ve logaritmik fonksiyonları içeren gerçek yaşam durumlarına ait sorular bulunmaktadır. Öğretmeniniz rehberliğinde 4-6 kişilik gruplar oluşturunuz. Aşağıdaki problem durumunu inceleyiniz ve soruları cevaplayınız.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı, çevrim içi öğrenmeyi desteklemek amacıyla aşağıdaki iki platformu sunmaktadır:

- EBA Akademik Destek: Lise öğrencilerine yönelik konu anlatımları, soru çözümleri ve deneme sınavlarına erişimi sağlar.
- MEBİ (Millî Eğitim Bakanlığı Bireysel Öğrenme Platformu): Öğrencilerin bireysel öğrenme ihtiyaçlarına uygun içerikler sunar.

Bir matematik öğretmeni, öğrencilerine EBA Akademik Destek ve MEBİ'ye dikkat çekmek amacıyla tahtaya aşağıdaki bilgilendirme metnini yazar.

2022-2024 yılları arasındaki ölçümlere göre EBA Akademik Destek kullanıcı sayısı 900 bindir ve her ay %8 oranında üstel olarak artmaktadır. MEBİ kullanıcı sayısı 1 milyon 200 bindir ve her ay %5 oranında üstel olarak artmaktadır.

Bu iki platformda toplam 2 milyon kullanıcı sayısına ulaşılması hedeflenmiştir. EBA Akademik Destek platformunda hedefte eksik kullanıcı sayısının geçen süreye bağlı değişimi f fonksiyonuyla, MEBİ platformunda hedefte eksik kullanıcı sayısının geçen süreye bağlı değişimi g fonksiyonuyla modellenmektedir.

Öğretmenin tahtaya yazdığı metne göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. EBA Akademik Destek ve MEBİ platformunda hedefte eksik kullanıcı sayısının geçen süreye bağlı değişimini sırasıyla ifade eden f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.
2. f ve g fonksiyonlarının sıfırlarını bulunuz. Sıfırların problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.
3. EBA Akademik Destek ve MEBİ platformunda hedefte eksik kullanıcı sayısının hangi sürede daha az veya aynı olduğunu gösteren $f = g$, $f < g$, $f > g$ denklem ve eşitsizliklerinin cebirsel ve grafik temsillerini ifade ediniz. Grafik temsillerini ifade ederken matematik yazılımlarından yararlanınız.





4. Elektronik tablo uygulamasını kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz.
 1. adım: **B1** hücresine Geçen Süre (x), **C1** hücresine Eba, **D1** hücresine Mebi, **E1** hücresine Kullanıcı sayısı hedefine en yakın uygulama yazınız.
 2. adım: **C2** hücresine önce = sonrasında f fonksiyonunun cebirsel temsilini x yerine **B2** olacak şekilde yazınız.
 3. adım: **D2** hücresine önce = sonrasında g fonksiyonunun cebirsel temsilini x yerine **B2** olacak şekilde yazınız.
 4. adım: **E2** hücresine = Eğer (C2 < D2;"Mebi";"Eba") yazınız.
 5. adım: EBA Akademik Destek ve MEBİ platformunda hedefte eksik kullanıcının daha az veya aynı olduğunu bulmak için **B2** hücresine gerçek sayı değerleri yazınız.

Aşağıda elektronik tablo uygulamasında yapılan benzer bir işlemin ekran görüntüsü verilmiştir.

	A	B	C	D	E
1		Geçen Süre	Eba	Mebi	Kullanıcı sayısı fazla olan uygulama
2		3,5	1178218	1423455	Mebi
3					
4					

5. Elde ettiğiniz ve yorumladığınız farklı temsillerden yararlanarak problemin çözümü için bir strateji oluşturunuz.

6. Çözüm stratejinizi kullanarak problemi çözünüz.

7. Matematik yazılımı yardımıyla problemin çözümünde elde ettiğiniz denklem ve eşitsizliklere ait grafikleri aşağıdaki adımları gerçekleştirerek çiziniz.

1. adım: **Giriş** bölümüne f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazıp grafiğini çiziniz.

2. adım: **Giriş** bölümüne g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazıp grafiğini çiziniz.

Grafiklerden yararlanarak problemin çözümünü doğrulayınız.



8. Problemin çözümünde kullanılabilecek olası çözüm stratejilerini belirleyiniz. Problemin çözümünde kullandığınız stratejilerini karşılaştırarak hangi stratejinin daha kullanışlı olduğunu açıklayınız.

9. Oluşturulan stratejilerin iki fonksiyonun birbiri ile ilişkisini içeren başka problemlerin çözümünde nasıl kullanılabileceği ile ilgili çıkarımlar yapınız. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.

Genlik, bir dalganın en yüksek (ya da en alçak) noktası ile sıfır noktası arasındaki mesafedir ve dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına bağlıdır. Dalganın enerjisi artarken genlik de artar. Deprem dalgalarının genliği artarsa depremin büyüklüğü de artar. Depremin büyüklüğü, depremin merkez üssünden belli uzaklıktaki sismograf tarafından kaydedilen dalgaların maksimum genliğinden yararlanılarak hesaplanır. Mikron cinsinden ölçülen maksimum genlik d (mikron) ve depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğü R olmak üzere $R: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $R = \log d$ ile hesaplanır.

Verilen bilgileri kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a) Maksimum genliği 10 cm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü hesaplayınız. ($1 \text{ mm} = 10^3$ mikron)
- b) Maksimum genliği 20 mm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü hesaplayınız. ($\log 2 \approx 0,301$)

c)

Deprem Büyüklüğü	$0 < R \leq 2$	$2 < R \leq 4$	$4 < R \leq 6$	$6 < R \leq 8$
Hasar Türü	Hasar yok	Hafif hasar	Orta hasar	Ağır hasar

Depremin büyüklüğü ve yapılarda meydana getirdiği hasar dereceleri yukarıdaki tabloda verilmiştir. A ilinde meydana gelen depremin maksimum genliği 2,5 cm, B ilinde meydana gelen depremin maksimum genliği 0,1 mm ve C ilinde meydana gelen depremin maksimum genliği 105 cm olduğuna göre bu illerdeki yapılarda meydana gelebilecek hasarları bulunuz.



- ç) Bir bölgede gerçekleşen, maksimum genliği x mm ($x \in \mathbb{R}^+$) olan bir deprem sonucunda bölgede bulunan yapılarda orta ve ağır hasar meydana gelmiştir. Bu nedenle bölgedeki yapılar kentsel dönüşüme girecektir.
- Verilenlere göre kentsel dönüşüme giren bir binayı etkileyen depremin genliğinin alabileceği mikron değerlerinin aralığını bulunuz.

- d) Depremin olası etkilerinin en aza indirilmesi ve deprem sonrası sürdürülebilir yaşam için alınacak tedbirlerde matematiğin rolü üzerine grup arkadaşlarınızla tartışınız.

11. Çıkarımlarınızın geçerliliğini sözel, cebirsel veya grafiksel olarak değerlendiriniz.

18. Örnek

Bilgi: Bir yayınevinde kitap satış miktarını geçen süreyi ifade eden t ye (ay) bağlı olarak modelleyen fonksiyonlar, $p(t) = \log_2 t$ şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyonundan türetilen $h(t) = k \cdot p(t) + r$ ($k, r \in \mathbb{R}$) fonksiyonları şeklinde modellenmektedir.

Bir yayınevi, aynı kitabı iki farklı pazarlama stratejisiyle satışa sunarak bu stratejilerin satış miktarına olan katkılarını incelemek istemektedir. Burada f fonksiyonu ile modellenen ilk stratejide 1. ayda 400 adet, 8. ayda 1000 adet satış gerçekleşmektedir. g fonksiyonu ile modellenen diğer stratejide 1. ayda 700 adet, 4. ayda 900 adet satış gerçekleşmektedir.

Verilen bilgilere göre

1. f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilini bulunuz.
2. Her iki stratejide de eşit miktarda kitap satışının yapıldığı zamanı gösteren ifadenin cebirsel ve grafik temsilini yaparak eşit miktarda satışın gerçekleştiği ayı bulunuz.
3. f fonksiyonu ile modellenen satış stratejisindeki kitap satış miktarının g fonksiyonu ile modellenen satış stratejisindeki kitap satış miktarından fazla olmasına karşılık gelen eşitsizliğin cebirsel temsilini bularak eşitsizliği çözünüz.



Çözüm

1. Bir yayınevinin belirlediği stratejiler kitapların satış miktarını etkilediğinden

$$f(t) = a \cdot \log_2 t + b, (a, b \in \mathbb{R}) \text{ olur.}$$

$$t = 1 \text{ için } f(1) = 400 \Rightarrow 400 = a \cdot \log_2 1 + b \Rightarrow 0 + b = 400 \Rightarrow b = 400 \text{ olur.}$$

$$t = 8 \text{ için } f(8) = 1000 \Rightarrow 1000 = a \cdot \log_2 8 + 400 \Rightarrow 3a + 400 = 1000 \Rightarrow a = 200 \text{ olur.}$$

Buradan f fonksiyonu $f(t) = 200 \cdot \log_2 t + 400$ bulunur.

$$g(t) = c \cdot \log_2 t + d, (c, d \in \mathbb{R}) \text{ olur.}$$

$$t = 1 \text{ için } g(1) = 700 \Rightarrow 700 = c \cdot \log_2 1 + d \Rightarrow 0 + d = 700 \Rightarrow d = 700 \text{ olur.}$$

$$t = 4 \text{ için } g(4) = 900 \Rightarrow 900 = c \cdot \log_2 4 + 700 \Rightarrow 2c + 700 = 900 \Rightarrow c = 100 \text{ olur. Buradan } g \text{ fonksiyonu } g(t) = 100 \cdot \log_2 t + 700 \text{ bulunur.}$$

2. Her iki strateji kullanılarak aynı sürede eşit miktarda kitap satışı yapılabilmesi için $f(t) = g(t)$ olmalıdır. Buna göre $200 \cdot \log_2 t + 400 = 100 \cdot \log_2 t + 700 \Rightarrow 100 \cdot \log_2 t = 300 \Rightarrow \log_2 t = 3 \Rightarrow t = 8$ bulunur. Bu durumda her iki strateji kullanılarak eşit miktarda kitap satışı 8. ayda yapılır.

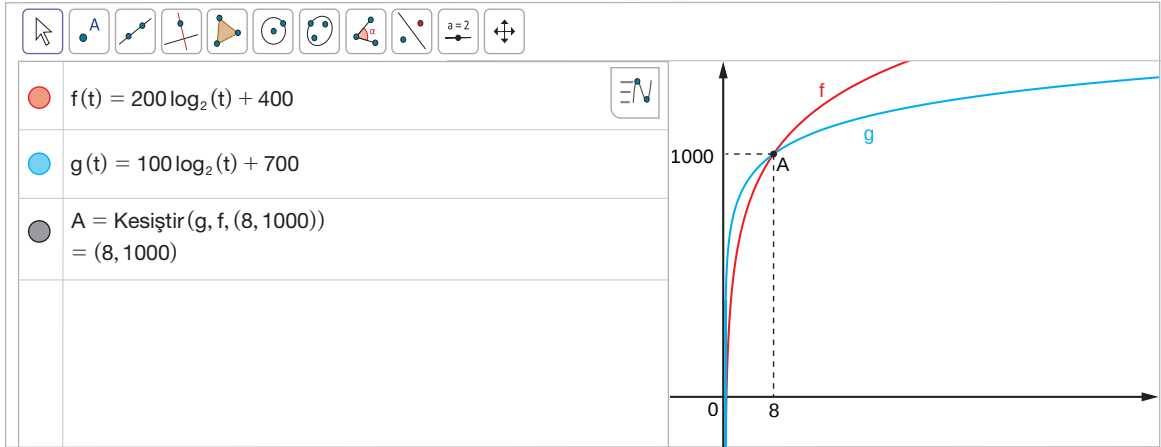
Bu problem durumunun çözümünün grafik temsili ile yapılabilmesi için matematik yazılımında aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir.

1. adım: Giriş bölümüne $f(t) = 200 \cdot \log_2 t + 400$ yazılarak f fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. adım: Giriş bölümüne $g(t) = 100 \cdot \log_2 t + 700$ yazılarak g fonksiyonunun grafiği çizilir.

3. adım: Araçlar sekmesinden **Kesiştir** aracı seçilip f ve g fonksiyonlarının üstüne tıklandığında fonksiyonların kesiştiği nokta bulunur.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



f ve g fonksiyon grafiklerinin kesişim noktasının apsis değerinin problem bağlamındaki anlamı, her iki strateji kullanılarak eşit miktarda kitap satışının 8. ayda gerçekleşmesidir.

3. f fonksiyonu ile modellenen satış stratejisinden elde edilen kitap satış miktarının g fonksiyonu ile modellenen satış stratejisinden elde edilenden fazla olması cebirsel $f(t) > g(t)$ ile gösterilir. Buradan

$$200 \cdot \log_2 t + 400 > 100 \cdot \log_2 t + 700$$

$$100 \cdot \log_2 t > 300$$

$$\log_2 t > 3$$

$$t > 2^3 \Rightarrow t > 8 \text{ olur.}$$

$f(t) > g(t)$ eşitsizliğini sağlayan t değerleri $(8, \infty)$ aralığındadır.

19. Örnek

Salgın dönemlerinde bulaşıcı hastalıkların zaman içerisinde yayılma miktarlarını anlamak için matematiksel araçlardan yararlanılarak epidemik modeller kullanılır. Bu modeller arasında en bilinenler SIR (Susceptible, Infectious, Recovered) ve SEIR (Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered) modelidir.

SIR modeli, popülasyonu üç gruba ayırarak; SEIR modeli, popülasyonu dört gruba ayırarak salgının yayılma hızı ile ilgili bilgi verir. Bu gruplar şunlardır:

- I. Susceptible (Sıseptibil) (S): Hastalık taşımaya duyarlı bireyler
- II. Infectious (İnfeksiyon) (I): Hastalığın bulaştığı ve taşıyıcı olan bireyler
- III. Recovered (Rikavırd): İyileşmiş ve artık hasta olamayan bireyler
- IV. Exposed (Ekspozd) (E): Taşıyıcı ama hastalığı bulaştırmayan bireyler

Her iki modelde de hasta sayısı başlangıçta üstel olarak artar. Belli bir süre sonra hastalık epidemik pik (zirve) seviyesine ulaşır. Başka bir ifadeyle hasta sayısı en yüksek değerine ulaşır. Başlangıçtan hastalığın pik seviyesine ulaştığı zamana kadar geçen süreye “pik süresi” denir. Alınan koruma önlemleri pik süresini (gün) ve pik seviyesini etkiler. Salgın, pik seviyesine ulaştıktan sonra hasta sayısı zamanla azalmaya başlar.



Bir şehirde gözlenen salgında hasta sayısının başlangıçta üstel büyüme gösterdiği, hastalığın pike ulaşmasından sonra ise hasta sayısının logaritmik azalış gösterdiği saptanmıştır.

$P(0)$: başlangıçta hasta olan kişi sayısı

r : enfeksiyon oranı

t_0 : salgının pik süresi olmak üzere

t . gün sonunda hasta sayısı $P(t) = \begin{cases} P(0) \cdot e^{rt} & , t < t_0 \\ 150 - 20 \cdot \ln t & , t \geq t_0 \end{cases}$ şeklinde modellenmiştir.

Başlangıçta hasta sayısının 40 olduğu ve enfeksiyon oranının $\frac{1}{80}$ olduğu bir salgında salgının pik süresinin 30 günden daha az olamayacağı öngörülmüştür. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. 20. gün sonunda hasta olan kişi sayısını yaklaşık olarak bulunuz.
2. Salgında pik süresini grafik temsillerinden yararlanarak bulunuz.
3. Yukarıdaki sorularda kullandığınız stratejileri verimlilik ve kullanılabilirlik açısından değerlendiriniz.

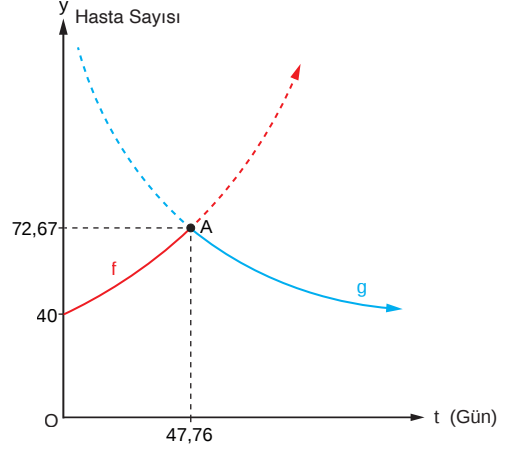


Çözüm

1. Hastalığın pik süresi t_0 bir aydan daha az olmadığından $t = 20$ için hasta olan kişi sayısı $P(t) = P(0) \cdot e^{rt}$ fonksiyonu ile bulunur. Enfeksiyon oranı $r = \frac{1}{80}$ ve başlangıçtaki hasta sayısı $P(0) = 40$ olduğundan $P(20) = 40 \cdot e^{20 \cdot \frac{1}{80}} = 40 \cdot e^{\frac{1}{4}}$ bulunur. $e^{\frac{1}{4}} \approx 1,284$ için $P(20) \approx 40 \cdot 1,284 = 51,361$ bulunur. Buna göre 20. günde hasta sayısı yaklaşık 51 kişi olur.

2. Hasta sayısındaki artış $f(t) = 40 \cdot e^{\frac{t}{80}}$ üstel fonksiyonuyla modellenirken hasta sayısının pik yapmasından sonraki azalışı $g(t) = 150 - 20 \cdot \ln t$ logaritmik fonksiyonuyla modellenir. Yanda hasta sayısını gösteren f ve g fonksiyonlarının grafik temsilleri verilmiştir.

Fonksiyonların kesişme noktasında hastalık pik seviyesine ulaşır. Yandaki grafik incelendiğinde f ve g fonksiyonlarının $t = 47,76$ noktasında kesiştiği görülür. Buna göre hastalığın pik seviyesine ulaşması yaklaşık 48 gün sürer.

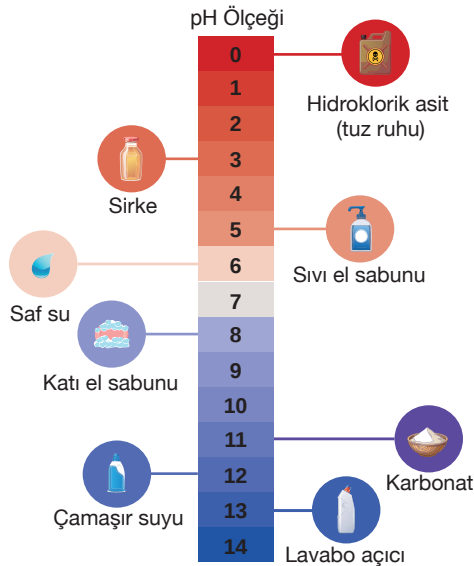


3. 1. soruda yer alan matematiksel model için çözüm stratejisi olarak cebirsel yöntem kullanılmıştır. Bunun yanı sıra grafik temsillerinden yararlanılarak da aynı sonuca varılacaktır. 2. soruda yer alan matematiksel model için çözüme ulaştıran denklemin karmaşık yapısından dolayı cebirsel yöntem kullanılamayacağından çözüm stratejisi olarak grafik temsilden yararlanılmıştır.

Sıra Sizde 11

İnsan cildinin sağlıklı olabilmesi için gereken hidrojen iyon derişimi (mol/L) 10^{-4} ile 10^{-6} , aralığındadır. Bu hidrojen iyon derişim değerlerinden uzaklaşıldıkça temas edilen süre de dikkate alınarak temas eden maddelerin cilde zararı artar.

$[H^+]$ hidrojen iyon derişimi olmak üzere bir çözeltinin pH değeri $pH = -\log [H^+]$ şeklinde modellenir. Aşağıdaki görselde temizlik yapılırken kullanılan bazı maddelerin pH değerleri verilmiştir.



Buna göre

1. Görseldeki temizlik maddelerinden çamaşır suyunun içerdiği hidrojen-iyon derişimini (mol/L) bulunuz.
2. Görselden yararlanarak uzun süre temas edilmesi durumunda cilde zarar verebilecek temizlik ürünlerini yazınız.

20. Örnek

Aşağıdaki soruları tanımlı olduğu aralıklarda üstel ve logaritmik referans fonksiyonlarının çözüm stratejilerinden yararlanarak cevaplayınız.

1. $5^{x+1} - 3 = 17$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+14} > \left(\frac{1}{27}\right)^{7-2x}$
3. $\log[5 \cdot \log(x+3)] - 1 = 0$
4. $\log_3 x - 4 \leq 0$

Çözüm

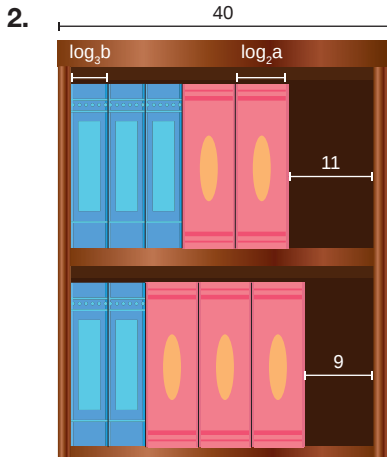
1. $5^{x+1} - 3 = 17$ ise $5 \cdot 5^x = 20$ bulunur. buradan $5^x = 4$ elde edilir. Tabanları farklı olan üstel denklemlerde ifadenin tersi alınarak $x = \log_5 4$ bulunur. $\mathcal{C} = \{\log_5 4\}$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+14} > \left(\frac{1}{27}\right)^{7-2x}$ ise $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+14} > \left(\frac{1}{3}\right)^{21-6x}$ olur. Buradan $x + 14 < 21 - 6x$ ise $7x < 7$ olur, $x < 1$ elde edilir. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi $\mathcal{C} = (-\infty, 1)$ olarak bulunur.
3. $\log[5 \cdot \log(x+3)] - 1 = 0$ ise $\log[5 \cdot \log(x+3)] = 1$ olur. Buradan logaritma tabanı 10 olduğu için $5 \cdot \log(x+3) = 10$ denklemi elde edilir. $\log(x+3) = \frac{10}{5} = 2$ den $\log(x+3) = 2$ olur. Buradan $x+3 = 10^2$ den $x = 97$ olarak bulunur. $\mathcal{C} = \{97\}$ olur.
4. $\log_3 x - 4 \leq 0$ ise $\log_3 x \leq 4$ logaritma tabanı 3 olduğu için $x \leq 3^4$ ve $x \leq 81$ olarak bulunur. Logaritma fonksiyonunun tanımından dolayı $x > 0$ olacağı için $\mathcal{C} = (0, 81]$ olur.

Sıra Sizde 12

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Bir ülkenin nüfusu A milyon iken t yıl sonraki nüfusu $N(t) = A \cdot e^{0,02t}$ ($t \in \mathbb{Z}^+$) milyon olarak modellenmiştir.

Başlangıçta 20 milyon olan ülke nüfusu, en az kaç yıl sonra 54 milyonu geçer?
($e \approx 2,7$)



Eni $\log_2 a$ cm olan özdeş pembe kitaplar ve eni $\log_3 b$ cm olan özdeş mavi kitaplar, 40 cm enindeki raflara görseldeki gibi yerleştirilmiştir.

Üst rafa 3 mavi ve 2 pembe kitap yerleştirildiğinde rafta 11 cm boşluk kalmaktadır. Alt rafa 2 mavi ve 3 pembe kitap yerleştirildiğinde rafta 9 cm boşluk kalmaktadır.

Buna göre a ve b değerlerini bulunuz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



21. Örnek

Aşağıdaki logaritmik fonksiyon içeren eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

1. $2 < \log_2(x + 1) < 3$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) \geq -4$

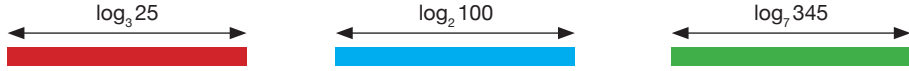
Çözüm

1. $2 < \log_2(x + 1) < 3$ eşitsizliğinde logaritma tabanı 2 olduğu için $2^2 < x + 1 < 2^3$ eşitsizliği elde edilir. $4 < x + 1 < 8$ ve $3 < x < 7$ olarak bulunur. Ayrıca $x + 1 > 0$ olduğu için $x > -1$ olmalıdır. $\mathcal{C} = (3, 7)$ olarak bulunur.
2. $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) \geq -4 \Rightarrow x + 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow x + 3 \leq 2^4 \Rightarrow x \leq 13$ olarak bulunur, ayrıca $x + 3 > 0$ için $x > -3$ olmalıdır. Buradan $\mathcal{C} = (-3, 13]$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 13

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. x ve y birer tam sayı olmak üzere $\log_5 400 < x < \log_3 250 < y < \log_2 1000$ eşitsizliği veriliyor. Buna göre $x + y$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamını bulunuz.

2. 

Uzunlukları sırasıyla $\log_3 25$ birim, $\log_2 100$ birim, $\log_7 345$ birim olan kırmızı, mavi ve yeşil bordürler yan yana olacak biçimde bir duvara döşenecektir.

En kısa bordürden en uzun bordüre doğru sırasıyla kaplanacağına göre dizilecek bordürlerin renk sıralamasını bulunuz.

3. n kenarlı bir çokgenin içine yazılan a pozitif gerçel sayısının gösterimi, " a sayısının n tabanında logaritması" şeklinde tanımlanmaktadır.

Örneğin  $= \log_5 x$,  $= \log_3 y$ şeklinde olmaktadır.

Buna göre $\frac{\text{blue square with x}}{\text{blue hexagon with 36}} \geq \frac{3}{2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Performans Görevi

Adı: Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlara Yönelik Denklem ve Eşitsizliklerin Kullanıldığı Gerçek Yaşam Problemlerinde Matematiksel Modelleme Yapma

Beklenen Performans: Üstel ve logaritmik denklem ve eşitsizliklerin kullanıldığı gerçek yaşam problemlerinin çözümünde matematiksel modelleme yaparak sunum yapma ve rapor hazırlama

Görev: Üstel ve logaritmik denklem ve eşitsizliklerin kullanıldığı gerçek yaşam problemlerinden birini seçerek bu problemlerin çözümünde matematiksel modelleme yapmanız ve çalışmalarınızı rapor hâline getirerek sunum yapmanız istenmektedir.

Yönerge:**Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:**

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Karekodda verilen gerçek yaşam problemlerinden birini seçiniz (örneğin: kimyasal tepkime hızı, ses desibeli, radyasyon azalması, bakteri artışı vb.)
- Problemi inceleyerek durumu ifade eden uygun üstel veya logaritmik denklem ya da eşitsizliği oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz modeli çözünüz ve sonucu problem bağlamında yorumlayınız.
- Çözüm sürecinizi (model kurma, çözme, yorumlama aşamalarıyla birlikte) rapor hâline getiriniz.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Raporunuzu özenle hazırlayarak öğretmeninize zamanında ve eksiksiz teslim ediniz.
- Raporunuzu sınıf arkadaşlarınıza sununuz.

Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Performans görevinin içeriğine ve Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Ek soruların yer aldığı 4. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Üstel ve Logaritmik Denklem İçeren Problemlerin Çözümü)



Kontrol Noktası

$a > 0, a \neq 1$, f , g ve h uygun koşullarda tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

Üstel Denklemler

- $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ise $f(x) = g(x)$
- $a^{f(x)} = g(x)$ ise $f(x) = \log_a g(x)$ ($g(x) > 0$)

Üstel Eşitsizlikler

- $0 < a < 1$ için $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ise $f(x) > g(x)$
- $a > 1$ için $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ise $f(x) < g(x)$

Logaritmik Denklemler

- $\log_a f(x) = g(x)$ ise $f(x) = a^{g(x)}$ ($f(x) > 0$)
- $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ise $f(x) = g(x)$ ($f(x) > 0, g(x) > 0$)
- $\log_{h(x)} f(x) = g(x)$ ise $f(x) = h(x)^{g(x)}$ ($f(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1$)
- $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ ise $f(x) = g(x)$ ($f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1$)

Logaritmik Eşitsizlikler

- $a > 1$ için $\log_a f(x) < g(x)$ ise $f(x) < a^{g(x)}$ ($f(x) > 0$)
- $a > 1$ için $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ise $f(x) < g(x)$ ($f(x) > 0, g(x) > 0$)
- $0 < a < 1$ için $\log_a f(x) < g(x)$ ise $f(x) > a^{g(x)}$ ($f(x) > 0$)
- $0 < a < 1$ için $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ise $f(x) > g(x)$ ($f(x) > 0, g(x) > 0$)

Alıştırmalar

1. $\log_3(x + 3) \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.
2. Başlangıçta boş olan kumbarasına her gün bir miktar para atan Derin, ilk gün kumbarasına 3 TL atmıştır. Daha sonra her gün kumbarada biriken para miktarı bir önceki günün 3 katına çıkmaktadır. Buna göre kumbaradaki paranın kaçınıcı günde 729 TL olacağını bulunuz.

3. Aşağıdaki tabloda bir yerleşim yerinin yıllara göre nüfusları verilmiştir.

Yıl	2016	2017	2018	2019	2020
Nüfus	10 000	11 000	12 100	13 310	14 641

Buna göre zamana bağlı nüfus artışını gösteren üstel fonksiyonu tanımlayarak hangi yıldan itibaren nüfusun 17 000'den fazla olacağını bulunuz.

4. Bir şirket, her yıl sonunda ürünlerinin maliyetini bir önceki yıla göre %10 oranında azaltmayı hedefliyor. İlk yıl bir ürünün üretim maliyeti 1000 TL olarak hesaplanmıştır.

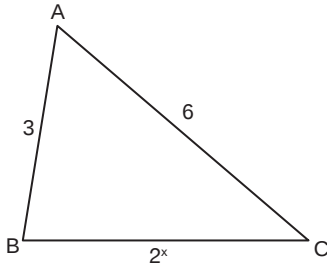
Buna göre şirketin bu ürünün maliyetini en az kaç yıl sonra 729 TL'nin altına düşürebileceğini bulunuz.

5. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{9}{4}\right)^{x+3}$

b) $\log_3(\log_2(x-1)) < 1$

- 6.



Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninde $|AC| = 6$ birim, $|AB| = 3$ birim ve $|BC| = 2^x$ birimdir.

Buna göre x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

7. $3^{\log_x 8} \cdot 2^{\log_x 3} = 9$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

8. $f(x) = \log_4(x^2 + 12x + m)$ logaritma fonksiyonu her x gerçekte sayı için tanımlıdır.

Buna göre m nin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

9. $f(x) = \log_7(-4x^2 + 4x + 15)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı bulunuz.

4. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait farklı türlerde 17 adet soru yer almaktadır.

1-13. bilgi ve becerileri ölçen soruları cevaplayınız.

1. Astronomi alanında yapılan araştırmalarda gökte parlayan bir yıldızın görünen parlaklığı ile gerçek parlaklığı arasındaki ilişki logaritmik fonksiyon kullanılarak gösterilir. Bir yıldızın parlaklık birimi lümen ve

A: yıldızın gerçek parlaklığının ölçüsü (lümen)

B: yıldızın görünen parlaklığının ölçüsü (lümen) olmak üzere

$B = 3 \log A - 2$ bağıntısı vardır.

Buna göre

- a) Gerçek parlaklığı 1000 lümen olan yıldızın görünen parlaklığının kaç lümen olduğunu bulunuz.
- b) Gerçek parlaklığı 810 lümen olan yıldızın görünen parlaklığının yaklaşık kaç lümen olduğunu bulunuz. ($\log 3 \approx 0,47$)
- c) Görünen parlaklığı 2,5 lümen olan yıldızın gerçek parlaklığının kaç lümen olduğunu bulunuz.

2. Bir radyoaktif maddenin yarılanma süresi karakteristik bir sabittir. Yarılanma süresi, maddedeki bozunma sonucunda maddenin yarı yarıya azalması için geçen süredir.

$A(t)$: t zamanında maddenin kalan miktarı (kg)

A_0 : maddenin başlangıçtaki miktarı (kg)

t: geçen süre (yıl)

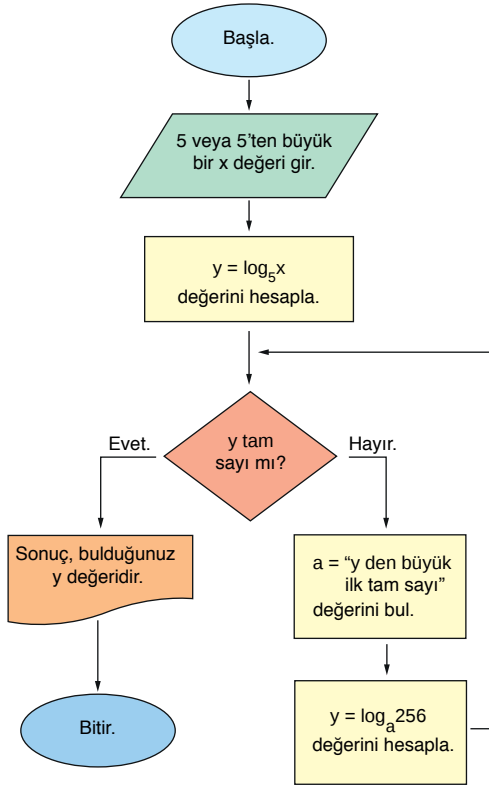
h: yarılanma süresi (yıl) olmak üzere zamana bağlı kalan madde miktarını (kg) veren eşitlik

$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ şeklindedir.

Buna göre

- a) Yarılanma süresi 6 yıl olan bir maddeden başlangıçta 32 kg vardır. 24 yıl sonraki kalan madde miktarının kaç kg olacağını hesaplayınız.
- b) Yarılanma süresi 5 yıl olan bir maddeden başlangıçta 40 kg vardır. Yaklaşık kaç yıl sonra kalan madde miktarının 30 kg olacağını hesaplayınız. ($\log_2 3 \approx 1,58$)
- c) Bir radyoaktif maddeden başlangıçta 200 kg vardır. 16 yıl sonraki kalan madde miktarı 50 kg olduğuna göre bu maddenin yarılanma süresinin kaç yıl olacağını hesaplayınız.

3. Aşağıda bir algoritmanın akış şeması verilmiştir.



Buna göre

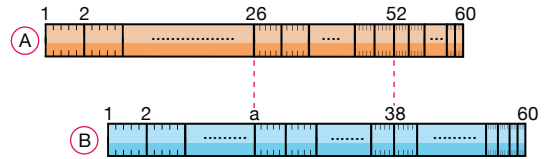
- a) $x = 10$ değeri için çıkan sonucu bulunuz.
- b) $x = 29$ değeri için çıkan sonucu bulunuz.
- c) Çıkan sonucun 4 olabilmesi için x yerine yazılabilecek en küçük tam sayı değerini bulunuz.

4. Bir metro hattında aşağıdaki görselde verildiği gibi $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{25}$ durakları yer almaktadır. $\forall m \in [1, 24]$ ndaki sayma sayısı için D_m ve D_{m+1} durakları arasındaki mesafe $9 \cdot \log_5 \frac{m+1}{m}$ km olmaktadır.



Buna göre D_1 ve D_{25} durakları arasındaki mesafenin kaç km olduğunu bulunuz.

5. Üzerinde 1'den 60'a kadar tam sayıların yazılı olduğu bir cetvel türünde her x pozitif tam sayısının 1'e olan uzaklığı $\log x$ birimdir.



Bu özellikteki özdeş A ve B cetvelleri şekildeki gibi alt alta getirildiğinde A cetvelindeki 52 sayısı B cetvelindeki 38 sayısına, A cetvelindeki 26 sayısı ise B cetvelindeki a sayısına denk gelmektedir.

Buna göre a değerini bulunuz.

6. Newton (Nivtin)'in soğuma yasasına göre sıcaklığı yüksek olan maddeler daha düşük sıcaklıktaki bir ortama bırakıldığında zamanla soğur.

t: geçen süre (dakika)

$T(t)$: maddenin t anındaki sıcaklığı ($^{\circ}\text{C}$)

$T_{\text{ç}}$: ortamın sabit sıcaklığı ($^{\circ}\text{C}$)

T_0 : maddenin $t = 0$ anındaki sıcaklığı ($^{\circ}\text{C}$)

k: soğuma sabiti

olmak üzere Newton'ın soğuma yasası

$T(t) = T_{\text{ç}} + (T_0 - T_{\text{ç}})e^{-k \cdot t}$ denklemi ile modellenmektedir.

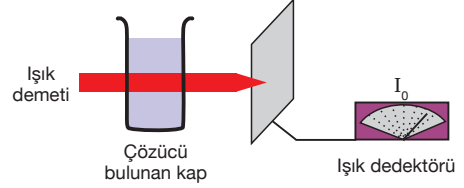
Buna göre

- a) Sıcaklığı 78°C olan bir yemek, 50 dk. boyunca 24°C olan oda sıcaklığında bekletildiğinde süre sonunda yemeğin yaklaşık kaç $^{\circ}\text{C}$ olacağını bulunuz.
($k = 0,02$, $e \approx 2,7$)

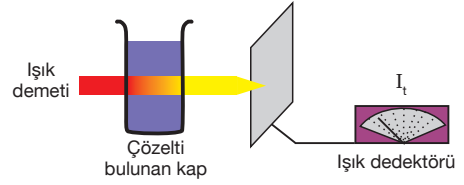
- b) Sıcaklığı $96,9^{\circ}\text{C}$ olan bir çaydanlığın 24°C olan oda sıcaklığında yaklaşık kaç dakika bekletildiğinde sıcaklığının 34°C 'a düşeceğini bulunuz.
($k = 0,02$, $e \approx 2,7$)

7. Spektrofotometre (sıpektrofotometre), katı veya sıvı numunelerin yoğunluklarını ışık geçirgenliği yardımıyla hesaplayan bir cihazdır. Aşağıda sıvı numunelerde spektrofotometrenin çalışma prensibi verilmiştir.

Şekilde gösterildiği gibi içinde çözücü bulunan bir kap, ışık yoluna yerleştirilir ve ışığın kaptan geçtikten sonraki yoğunluğu ölçülür (I_0).



Daha sonra numuneli çözelti bulunan kap, ışık yoluna yerleştirilir ve ışığın kaptan geçtikten sonraki yoğunluğu ölçülür (I_t).



Maddenin yoğunluğu $C = -2500 \ln\left(\frac{I_t}{I_0}\right)$ (Mol/L) formülü kullanılarak bulunur.

Buna göre

- a) I_t değeri I_0 değerinin %25'i olan sıvı numunenin yoğunluğunun yaklaşık kaç Mol/L olduğunu bulunuz.
($\ln 2 \approx 0,69$)

- b) Yoğunluğu 4025 Mol/L olan bir sıvı numunede I_t değerinin, I_0 değerinin yaklaşık yüzde kaçına eşit olduğunu bulunuz. ($\ln 5 \approx 1,61$)

8. x ve y pozitif gerçel sayılar ve $x \neq 1$ için

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \text{ sembolünün değeri "x tabanında}$$

logaritma y " değerine eşittir.

Örneğin $\begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix} = \log_2 8 = 3$ bulunur.

$$\begin{matrix} a \\ 2 \end{matrix} = \frac{2}{5} \quad \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} = \frac{5}{3} \quad \begin{matrix} c \\ b \end{matrix} = 9$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Buna göre c gerçel sayısının değerini bulunuz.

9. Bir şehirde grip salgını gözlemlenmiştir. Hastalığın t gün sonra yayıldığı kişi sayısı

$$P(t) = \frac{650}{1 + 24 \cdot 2^{-0.2t}} \text{ ile modelleniyor.}$$

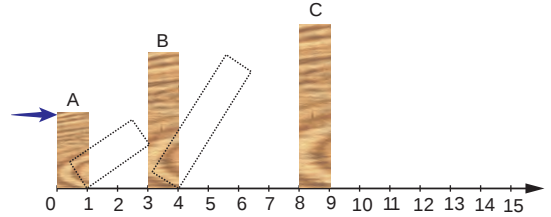
Buna göre

- Başlangıçta kaç kişinin grip olduğunu bulunuz.**
- Grip salgınının 5. gününde hastalığın yayıldığı kişi sayısını bulunuz.**
- Grip salgınında hastalığın yayıldığı kişi sayısının 130 kişi olması için yaklaşık kaç gün geçmesi gerektiğini bulunuz. ($\log_2 6 \approx 2,58$)**

10. Aşağıdaki görselde önden görünümüleri dik-dörtgen şeklinde olan 1 cm genişliğindeki A, B ve C tahta blokları verilmiştir. Blokların uzunlukları sırasıyla $\log_5 35$, $\log_3 x$ ve $\log_2 40$ cm'dir.

A bloğu ok yönünde itilerek yere değen sağ köşesi üzerinde dönerek devriliyor.

A bloğu, B bloğunun devrilmesine; B bloğu, C bloğunun devrilmesine neden oluyor.



Buna göre

- x in alabileceği en küçük tam sayı değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.**
- C bloğu devrildiğinde bloğun sağ kenarının üst köşesinin hangi iki tam sayının arasına denk geleceğini bulunuz.**

11. Bir yayınevi bastığı belli türdeki kitapların zamana bağlı toplam satış sayılarını incelemiştir. x bir kitabın basılmasından sonra geçen zaman (ay) olmak üzere a tane kitapçıda satışa sunulan bir kitabın toplam satış sayısı $f(x) = 300 \cdot a \cdot \log_2(x + 1)$ olarak modellenmiştir.

Yayınevi bastıracağı “Geçmişten Geleceğe Matematik (G)” kitabını 10 kitapçıda, 3 ay sonra bastıracağı “Matematiğin İzinde (H)” kitabını 20 kitapçıda satışa sunmuştur. G kitabının basımından itibaren geçen süreyi esas alarak G kitabının zamana bağlı toplam satış sayısı fonksiyonu g , H kitabının zamana bağlı toplam satış sayısı h fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

- a) g ve h fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.

- b) g ve h fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

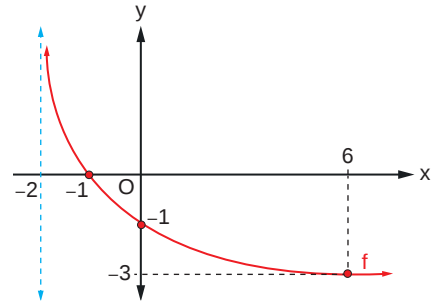
- c) g fonksiyonunun grafiğine uygulanacak hangi dönüşümler sonucunda h fonksiyonunun grafiğinin elde edileceğini bulunuz.

12. Bir matematik öğretmeni, öğrencilerinin logaritmik fonksiyonların tanım aralığına ait bilgilerini ölçmek amacıyla aşağıdaki kurgusal durumu içeren bir problem oluşturmuştur.

Bir sistemin performansını modellemek amacıyla her gerçekte sayı değeri için tanımlı ve cebirsel temsili $f(x) = \log_2(x^2 + 2px + 36)$ olan f fonksiyonu oluşturulmuştur. Buna göre p nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

Öğretmenin oluşturduğu problemin doğru cevabını bulunuz.

13. Bir mühendislik firması, kullandıkları bir sistemin tepki hızının gösterildiği grafiği incelerken aşağıdaki eğriyi elde etmiştir.

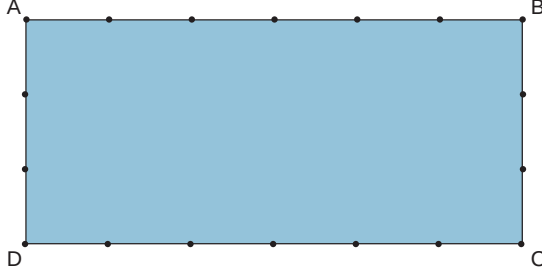


Firma, sistemin tepki hızının gösterildiği grafiği matematiksel bir modelle ifade etmek istemektedir. Mühendisler, yaptıkları analiz sonucunda modeli $f(x) = \log_a(bx + c)$ şeklindeki f logaritmik fonksiyonuna ait cebirsel temsili kullanarak oluşturmuştur.

Buna göre f fonksiyonun cebirsel temsili bulunuz.

14-17. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

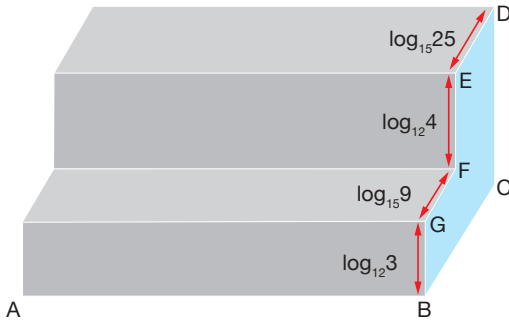
14. Aşağıdaki ABCD dikdörtgeninde AB ve DC kenarları 6 eş parçaya ayrılmış ve her bir parçanın uzunluğu $\log_6 9$ birim olmuştur. AD ve BC kenarı ise 3 eşit parçaya ayrılmış ve her bir parçanın uzunluğu $\log_6 16$ birim olmuştur.



Buna göre ABCD dikdörtgeninin çevre uzunluğunun birim cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 30

15. Aşağıdaki görselde basamak yüzeyleri birbirine dik olan seyyar bir merdiven verilmiştir. $|BG| = \log_{12} 3$ birim, $|GF| = \log_{15} 9$ birim, $|FE| = \log_{12} 4$ birim, $|ED| = \log_{15} 25$ birim ve $3 \cdot (|ED| + |GF|) = |AB|$ dir.



Buna göre merdivenin gri yüzeylerinin alanının birimkare cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 12 B) 15 C) 18
D) 20 E) 24

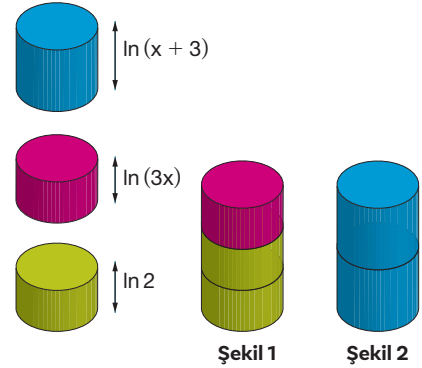
16. Üzerinde santimetre cinsinden logaritmik değerlerin yazılı olduğu şekildeki cetvelde kalemın bir ucunun $\log_2 3$, diğer ucunun $\log_2 3072$ hizasında olduğu görülmektedir.



Buna göre kalemın boyu kaç cm'dir?

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

17. Aşağıdaki görsellerde yükseklikleri sırasıyla $\ln(x+3)$ birim, $\ln(3x)$ birim ve $\ln 2$ birim olan mavi, pembe ve yeşil bloklar verilmiştir.



Şekil 1'deki 2 tane yeşil ve 1 tane pembe blok ile Şekil 2'deki 2 mavi bloğun birleştirilmesiyle oluşturulmuş kulelerin yükseklikleri eşittir.

x uzunluğunun kaç birim olduğunu gösteren gerçekteki sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2 B) 3 C) 3,6
D) 4 E) 5

Tema ile ilgili daha fazla soruya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

